Dumitru BĂLĂ

METODE CANTITATIVE

Dumitru BĂLĂ

METODE CANTITATIVE

EDITURA UNIVERSITARIA
Craiova, 2015

Referenţi ştiinţifici:
Conf. univ. dr. Dalia Mirela SIMION
Universitatea din Craiova
Conf. univ. dr. Daniel TOBĂ
Universitatea din Craiova

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
BĂLĂ, DUMITRU
Metode cantitative / Dumitru Bălă. - Craiova : Universitaria, 2015
Bibliogr.
ISBN 978-606-14-0898-6

51

PREFAȚĂ

Lucrarea de faţă se adresează în primul rând studenţilor de la facultăţile cu profil economic şi cuprinde programa analitică la disciplina „Matematici aplicate în economie”, "Metode cantitative în studiul pieţei", "Metode cantitative în gestiunea afacerilor" prevăzută în planul de învăţământ. Plecând de la ideea că un curs scris nu trebuie să-l înlocuiască pe cel oral (predat în faţa studenţilor), în text nu au fost introduse comentarii dense, urmând ca acestea să fie prezentate în funcţie de nivelul studenţilor.

Precizez că definiţiile, unele teoreme (enunţul şi demonstraţia) au fost preluate din literatura de specialitate fără modificări întrucât sunt cunoscute (Exemple: Teorema lui Rolle, Teorema lui Fermat, notaţiile lui Monge ş.a.m.d.).

De asemenea precizez că am prezentat şi exemple din literatura de specialitate, în care expresiile sunt simetrice, rezultatele simple şi au fost preferate în locul unor exemple proprii, punând pe primul plan aspecte de ordin metodic. Elementele de originalitate se găsesc în studiul stabilităţii sistemelor dinamice, rezultatele realizându-se şi pe baza derulării contractului de cercetare 3C/27.01.2014. Lucrarea propune teme utile atât economiştilor, inginerilor, geografilor cât şi profesorilor. Ea poate servi nu numai la pregătirea examenului de matematică, ci şi ca sursă de informare după promovarea acestuia.

Cu speranţa că lucrarea se va dovedi utilă, autorul aşteaptă cu interes din partea cititorilor orice observaţii şi sugestii pertinente.

Dumitru Bălă
Drobeta Turnu – Severin

Capitolul I

Puncte de extrem ale funcţiilor reale definite pe o submulţime a lui R

Definiţia 1.1. Fixăm o funcţie f: $A\subset R\to R$. Un punct $x_0\in A$ se numeşte *punct de maxim relativ* (respectiv de *minim relativ*) al lui f dacă există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încât pentru orice $x\in U\cap A$, să avem:

$$f(x)\le f(x_0) \quad (\text{respectiv } f(x)\ge f(x_0))$$

$f(x_0)$ se numeşte maxim (respectiv minim) relativ al lui f.

Observaţii:

1) Punctele de maxim sau de minim relativ se numesc puncte de extrem relativ.

2) Dacă inegalităţile $f(x)\le f(x_0)$ (respectiv $f(x)\ge f(x_0)$) sunt stricte pentru orice $x\in U\cap A$, $x\neq x_0$, se spune că x_0 este un punct de extrem strict.

Definiţia 1.2. Valorile funcţiei în punctele ei de extrem relativ se numesc *extreme relative* ale funcţiei.

Observaţii:

1) Faptul că funcţia considerată este cu valori reale este esenţial (folosindu-se relaţia de ordine $\le$ pe R).

2) O funcţie poate să aibă mai multe puncte de maxim și minim relativ.

3) Un minim relativ poate să fie mai mare decât un maxim relativ ceea ce justifică adjectivul „relativ”.

4) Valorile $\sup_{x\in A} f(x)$, $\inf_{x\in A} f(x)$ calculate în R se mai numesc extreme globale ale lui f pe A.

5) Punctele de extrem relativ se mai numesc puncte de extrem local, deoarece inegalităţile de tipul f(x)≤f(x_0) (respectiv f(x) ≥ f(x_0) sunt verificate nu neapărat pe întreg domeniul de definiţie al funcţiei f ci numai în jurul lui x_0 .
6) Dacă marginea M = $\sup\limits_{x\in A}$ f(x) este atinsă, atunci orice punct x astfel încât f(x_0) = M va fi un punct de maxim (nu neapărat strict).
7) Se poate întâmpla ca x_0 să fie un punct de maxim şi totuşi f(x_0) < M.
8) Dacă marginea superioară sup f(x) nu este atinsă pe mulţimea A, atunci se poate ca funcţia să nu aibă puncte de maxim.

Teorema lui P. Fermat. Fie $x_0 \in$I un interval deschis şi x_0 un punct de extrem (relativ) al unei funcţii f:I→R. Dacă f este derivabilă în punctul x_0, atunci $f'(x_0)$=0.

Demonstraţia în $[22]$ la pagina 152.

Observaţii:
1) Dacă I nu ar fi fost interval deschis, de exemplu I=[a,b] şi x_0=a (sau x_0=b), atunci teorema nu ar fi fost adevărată pentru că f(x) nu ar fi fost definită pentru x < a, respectiv pentru x > b.
2) Reciproca teoremei lui Fermat este în general falsă. Demonstraţia se face dând un contraexemplu:

$f(x)=x^3; f'(x)=3x^2;\ f'(0)=0$ nu rezultă x_0=0 punct de extrem local pentru că f este strict crescătoare.
3) Teorema lui Fermat dă condiţii necesare de extrem, dar nu şi suficiente.
4) Interpretarea geometrică a teoremei lui Fermat.

În condiţiile enunţului, într-un punct de extrem, tangenta la grafic este paralelă cu axa Ox.
5) Dacă f:I→R este o funcţie derivabilă pe un interval deschis I, atunci zerourile derivatei f pe I sunt numite şi puncte critice ale lui f pe I.

6) Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem local sunt printre punctele critice.

Teorema lui M. Rolle. Fie $f:[a,b]\to R$, $a<b$ o funcţie Rolle astfel încât $f(a)=f(b)$, atunci există cel puţin un punct $c\in(a,b)$ astfel încât $f'(c)=0$.

Definiţia 1.3. O funcţie $f:[a,b]\to R(a<b)$ se numeşte funcţie Rolle dacă este continuă pe intervalul deschis (a,b).

Corolar 1.1. Între două zerouri ale unei funcţii derivabile pe un interval se află cel puţin un zero al derivatei.

Teorema lui Darboux. Dacă $f:I\to R$ este o funcţie derivabilă pe un interval I, atunci derivata sa f' are proprietatea lui Darboux adică nu poate trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare.

Corolar 1.2. Fie $f:I\to R$ o funcţie derivabilă pe un interval I. Dacă derivata f' nu se anulează pe I, atunci f' are semn constant pe I.

Teorema 1.1. Fie f o funcţie derivabilă de n ori, $n\geq 2$, într-un punct $a\in I$, astfel încât:

$$f'(a)=0,\ f''(a)=0,\ldots,f^{(n-1)}(a) = 0,\ f^{(n)}(a) \neq 0.$$

1) Dacă n este par, atunci a este punct de extrem al lui f; dacă $f^{(n)}(a)<0$ atunci a este punct de maxim, iar dacă $f^{(n)}(a)>0$, atunci a este un punct de minim.

2) Dacă n este impar, iar a este punct interior al intervalului I, atunci a nu este punct de extrem al funcţiei f.

Demonstraţie. Deoarece primele n–1 derivate se anulează în a, formula lui Taylor, de ordinul n, în punctul a, se scrie, pentru $x\in I$:

$$f(x) = f(a)+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}\alpha(x),$$

unde:

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0 \text{ şi } \alpha(a)=0,$$

atunci,

$$f(x)-f(a)=\frac{(x-a)^n}{n!}\,[f^{(n)}(a)+\alpha(x)].$$

Deoarece $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, avem:

$$\lim_{x\to a}\alpha\,[f^{(n)}(a)+\alpha(x)] = f^{(n)}(a).$$

Dacă $f^{(n)}(a)<0$, există o vecinătate V a lui a astfel ca:
$f^{(n)}(a)+\alpha(x)<0$, pentru $x\in V$.
Dacă n este par, avem $(x-a)^n\geq 0$, pentru orice $x\in I$, deci:
Dacă $f^{(n)}(a)>0$, atunci $f^{(n)}(a)+\alpha(x)>0$ pentru orice $x\in V$, de unde rezultă că:

$$f(x)-f(a)\leq 0 \text{ sau } f(x)\geq f(a), \text{ pentru } x\in V,$$

adică a este un punct de minim.
Dacă $f^{(n)}(a)<0$ atunci $f^{(n)}(a)+\alpha(x)<0$ pentru $x\in V$, de unde rezultă că $f(x)-f(a)\leq 0$ sau $f(x)<f(a)$ pentru $x\in V$, adică a este un punct de maxim.
Să considerăm acum cazul când a este un punct interior al intervalului I, iar n este impar.
Atunci $(x-a)^n<0$ dacă $x<a$ şi $(x-a)^n>0$ dacă $x>a$, deci:
dacă $f^{(n)}(a)>0$, atunci $f^{(n)}(a)+\alpha(x)>0$, pentru $x\in V$, de unde rezultă că:

$$f(x)-f(a)<0 \text{ adică } f(x)<f(a), \text{ dacă } x<a,\ x\in V,$$
$$f(x)-f(a)>0 \text{ adică } f(x)>f(a), \text{ dacă } x>a,\ x\in V$$

şi deci a nu este un punct extrem;
dacă $f^{(n)}(a)<0$ atunci:

$$f(x)>f(a), \text{ dacă } x<a,\ x\in V,$$
$$f(x)<f(a), \text{ dacă } x>a,\ x\in V$$

şi deci nici în acest caz a nu este punct extrem.

Observaţie:

Deoarece $f''(a)$ există, rezultă că f' există într-o întreagă vecinătate a lui a. Dacă n este par, iar a este punct interior al intervalului I, atunci derivata f' are semne diferite de o parte şi de alta a lui a. Într-adevăr, dacă ar avea acelaşi semn într-o vecinătate a lui a, atunci f ar fi strict monotonă în această vecinătate şi deci a n-ar mai fi punct extrem al lui f.

Corolarul 1.3. Fie f o funcţie derivabilă de două ori în punctul $a \in I$, astfel încât $f'(a)=0$ şi $f''(a) \neq 0$.
Dacă $f''(a)<0$, atunci a este *punct de maxim*.
Dacă $f''(a)>0$, atunci a este *punct de minim*.
Corolarul următor stabileşte o proprietate reciprocă:

Corolarul 1.4. Dacă f este derivabilă de două ori într-un punct interior $a \in I$ şi dacă f are în a un minim, atunci $f''(a) \geq 0$, iar dacă f are în a un maxim atunci $f''(a) \leq 0$.

Să presupunem că a este un punct de minim, deci $f'(a)=0$. Dacă am avea $f''(a)<0$, atunci din corolarul precedent ar rezulta că a este un punct de maxim şi am ajunge la o contradicţie. Aşadar $f''(a) \geq 0$.

La fel se demonstrează că dacă a este un punct de maxim, atunci $f''(a) \leq 0$.

Corolarul 1.5. Dacă f este derivabilă de trei ori în punctul interior $a \in I$ şi dacă $f'(a)=0$, $f''(a)=0$, $f'''(a) \neq 0$, atunci a nu este punct de extrem al funcţiei f.

Observaţie:
În cazul când n este impar, tangenta la grafic în punctul (a, f(a)) este paralelă cu axa Ox şi traversează graficul. Un asemenea punct, în care tangenta traversează graficul se numeşte punct de inflexiune.

Capitolul II

Funcţii reale de mai multe variabile reale

Se ştie că R^n este mulţimea sistemelor ordonate de n numere reale, adică:

$$R^n = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \mid x_i \in R;\ i = 1,2\ldots,n \right\}$$

Produsul scalar

V este K spaţiu vectorial.

Definiţia 2.1. *Se numeşte produs scalar pe V o aplicaţie $\varphi: V \times V \to K$ care satisface următoarele axiome:*

1) $\varphi(v,w) = \varphi(w,v) \qquad \forall\, v,w \in V$

2) $\varphi(\alpha v,w) = \alpha\varphi(v,w) \qquad \forall\, \alpha \in K,\ \forall\, v,w \in V$

3) $\varphi(u,v+w) = \varphi(u,v) + \varphi(u,w) \quad \forall\, u,v,w \in V$

Dacă în plus $\varphi(v,w)=0$, $\forall w \in V \Rightarrow v = 0$, atunci produsul se numeşte nedegenerat.

Notăm: $\varphi = <\,,\,>$ sau $\varphi(v,w) = < v,w >$ sau $\varphi(v,w) = v \cdot w$

Exemplul 2.1.

$V = K^n \quad <\ ,\ > :\ V \times V \to K$

$$< x , y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad < x , y > \in K$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots , x_n) \in V$$
$$y = (y_1, y_2, \ldots , y_n) \in V$$

Norme pe R^n

Definiţia 2.2. *Se numeşte normă pe R^n o aplicaţie $N : R^n \to R_+$ care satisface următoarele axiome:*

1) $N(x) \geq 0, \ \forall x \in R^n$ *şi* $N(x)=0 \Rightarrow x=0$
2) $N(\alpha x) = |\alpha| \, N(x), \ \forall \alpha \in R, \ \forall x \in R^n$
3) $N(x+y) \leq N(x) + N(y), \ \forall \ x, y \in R^n$

Observaţii:

1) $R^n = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in R ; \ i = \overline{1,n} \}$
2) $R_+ = \{ x \mid x \in R \text{ şi } x \geq 0 \}$
3) $R_+^* = \{ x \mid x \in R \text{ şi } x > 0 \}$

Propoziţia 2.1. $N: R^n \to R$

$$N(x) = \sqrt{<\mathbf{x}, \mathbf{x}>} \ \underset{\equiv}{\text{not}} \ \|x\| . \quad \forall \ x,y \in R^n$$

Aplicaţia N definită mai sus este o normă.

Demonstraţie:

$$N(x+y) = \|x+y\| = \sqrt{<\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}>} =$$

$$= \sqrt{<\mathbf{x}, \mathbf{x}> + \mathbf{2} <\mathbf{x}, \mathbf{y}> + <\mathbf{y}, \mathbf{y}>} \quad \leq$$

$$\leq \sqrt{\|\mathbf{x}\|^2 + \mathbf{2} \ | <\mathbf{x}, \mathbf{y}> | \ + \|\mathbf{y}\|^2} \quad \leq$$

$$\leq \quad \sqrt{\|\mathbf{x}\|^2 + \mathbf{2}\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2} \quad =$$

$$= \quad \sqrt{(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2} \quad = \|x\| + \|y\| \qquad \forall \ x, y \in R^n$$

Exemple de norme

1) $\forall\ x \in \mathrm{R}^n$; $\qquad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

$< x , y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$; $\quad \|x\| = \sqrt{< x , x >}$

2) $\forall\ x \in \mathrm{R}^n$; $\qquad \|x\|_1 = \max(|x_i|)$

3) $\forall\ x \in \mathrm{R}^n$; $\qquad \|x\|_2 = \sum_{i=1}^{n}(|x_i|)$

Distanţe pe $\mathbf{R}^n$

Definiţia 2.3. *Se numeşte distanţă pe R^n o aplicaţie $d : R^n \times R^n \rightarrow R_+$ care satisface următoarele axiome:*

1) *$d(x,y) \geq 0 \quad \forall\ x,y,z \in R^n$ şi $d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$*
2) *$d(x,y)=d(y,x) \quad \forall\ x,y \in R^n$*
3) *$d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y), \quad \forall\ x, y, z \in R^n$*

Propoziţia 2.2. *Dacă $N : R^n \rightarrow R_+$ este normă atunci $d : R^n \times R^n \rightarrow R_+$ dată prin $d(x, y) = N(x - y)$ este o distanţă pe R^n.*

Demonstraţie:

1) $d(x , y) = N(x - y) = N((-1)(y - x)) =$
$= |-1|\ N(y - x) = d(y , x)$

2) $d(x , y) = N(x - y) = N(x - z + z - y) \leq$
$\leq N(x - z) + N(z - y) = d(x , z) + d(z , y).$

Observaţii:

1) $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

2) $d_1(x, y) = \|x - y\|_1 = \max(|x_i - y_i|).$

3) $d_2(x, y) = \|x - y\|_2 = \sum_{i=1}^{n} | x_i - y_i |$

Definiţia 2.4. *(R^n, d) se numeşte spaţiu metric.*

Definiţia 2.5. *Fie $x_0 \in R^n$; $r \geq 0$. Se numeşte sferă deschisă centrată în x_0 şi rază r mulţimea:*

$$S(x_0, r) = \{ x \in R^n \mid d(x, x_0) \leq r \}$$

Observaţii:

1) $r = 0 \Rightarrow S(x_0, r) = \emptyset$

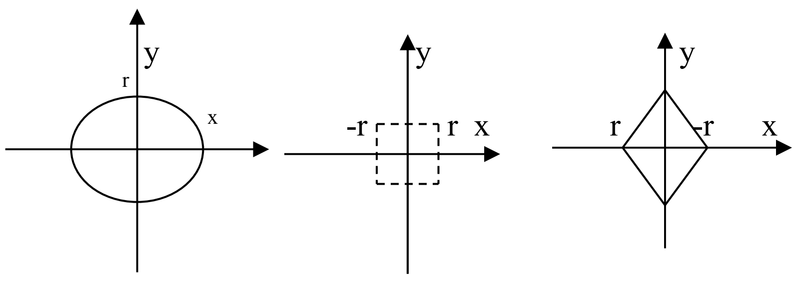
3) $x_0 = 0$, $n = 2$; $d(x,y) = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{1/2}$

$x = (x_1, x_2)$ $\quad$ $y = (y_1, y_2)$

$S(0, r) = \{ x = (x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 < r^2 \}$

$d = d_1$; $S_1(0, r) = \{ x = (x, y) \in R^2 \mid \max\{|x|, |y|\} < r \}$

$d = d_2$; $S_2(0, r) = \{ x = (x, y) \in R^2 \mid |x| + |y| < r \}$.



Topologie pe R^n

Definiţia 2.6. *Fie $x_0 \in R^n$. Se numeşte vecinătate a punctului x_0, $\forall M \subset R^n$ astfel încât să existe o sferă $S(x_0,r) \subset M$.*

Observaţii:

În particular orice $S(x_0, r)$ este vecinătate a lui x_0.

$\mathcal{V}(x_0)$ este mulţimea vecinătăţilor lui x_0.

V_{x_0} este o vecinătate a lui x_0.

Definiţia 2.7. *M se numeşte mulţime deschisă* $\Leftrightarrow$ $M \subset \mathcal{V}(x_0)\ \forall\ x_0 \in M$

$$\mathcal{D} \underline{\underline{\text{not}}} \left\{ M \,\middle|\, M = \textit{mulţime deschisă} \right\}$$

Definiţia 2.8. *M se numeşte mulţime închisă* $\Leftrightarrow$ *complementara sa este deschisă*

$$((R^n \setminus M) \in D).$$

$$\tau\ \underline{\underline{\text{not}}} \left\{ M \,\middle|\, M = \textit{mulţime închisă} \right\}.$$

Definiţia 2.9. *Un punct $x_0 \in R^n$ se numeşte punct aderent pentru mulţimea M, dacă oricare ar fi*

$$V \in \mathcal{V}(x_0),\ V \cap M \neq \emptyset$$

$$\overline{M} = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, x \textit{ punct aderent pentru mulţimea } M \right\}$$

Definiţia 2.10. *Un punct $x_0 \in R^n$ se numeşte punct de acumulare al mulţimii M dacă oricare ar fi*

$$V \in \mathcal{V}(x_0) \qquad M \cap \left[V \setminus \{x_0\} \right] \neq \emptyset$$

$$M' = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, x \text{ punct de acumulare pentru } M \right\}$$

Definiţia 2.11. *Un punct $x_0 \in R^n$ se numeşte punct interior pentru mulţimea M dacă există o mulţime deschisă*

$$\Delta \in D \ \text{a. î.} \ x_0 \in \Delta \subset M$$

$$\text{Int M} = M^0 = \{ \ x \in R^n \mid x \text{ punct interior pentru M} \ \}$$

Definiţia 2.12. *Un punct $x_0 \in R^n$ se numeşte punct izolat pentru mulţimea M dacă $x_0 \in M$ şi $x_0 \in M^{/}$*

Definiţia 2.13. *Un punct $x_0 \in R^n$ se numeşte punct frontieră a mulţimii M dacă el nu aparţine nici interiorului şi nici exteriorului mulţimii M.*

$$\text{FrM} = \{ \ x \in R^n \mid x \notin M^o \ x \notin \text{Ext M} \ \}$$

Definiţia 2.14. *Un punct $x_0 \in R^n$ se numeşte punct exterior pentru mulţimea M, dacă există o vecinătate*

$$V \in \{ \ V(x_0) \ \text{ a.î. } V \cap M = \varnothing \ \} \quad \text{sau}$$

$x_0 \in R^n$ se numeşte punct exterior pentru mulţimea M dacă

$$x_0 \in \overset{\frown}{CM}$$

$$\text{Ext M} = \{ \ x \in R^n \mid x \text{ punct exterior pentru M} \ \}$$

Definiţia 2.15. *Mulţimea M este mărginită dacă*

$$\exists \ S(0,r) \supset M$$

Definiţia 2.16. *Mulţimea M este compactă dacă M este mărginită şi închisă.*

Derivate parţiale.
Diferenţiabilitatea funcţiilor de mai multe variabile

Definiţia 2.17. *Fie $A\subseteq R^n$ şi $f:A\rightarrow R$. Valoarea funcţiei f într-un punct $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in A$ o vom nota cu f(x) sau $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Spunem că f este o funcţie reală de n variabile reale.*

Exemplul 2.2. $f: R^3\rightarrow R$, $f(x_1,x_2,x_3) = x_1+3x_2+7x_3$

Definiţia 2.18. *Fie $A\subseteq R^2, f: A \rightarrow R$ şi (a,b) un punct interior lui A. Funcţia f este derivabilă parţial în raport cu x în punctul (a,b), dacă:*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} \quad \text{există şi este finită.}$$

Vom nota această limită, dacă există, cu $f'_x(a,b)$ sau $\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial x}$ şi o vom numi derivata parţială de ordinul întâi a funcţiei f în punctul (a,b).

Definiţia 2.19. *Funcţia f este derivabilă în raport cu y în punctul (a,b) interior lui A, dacă:*

$$\lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} \quad \text{există şi este finită.}$$

La fel vom nota:

$$\lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} = f'_y(a,b) = \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}.$$

Definiţia 2.20. *Dacă funcţia f este derivabilă parţial în raport cu x (respectiv cu y) în fiecare punct al lui A, spunem că este derivabilă parţial în raport cu x (respectiv cu y) pe A.*

În general, f are derivată parţială în raport cu x_i în punctul $(a_1,a_2,....,a_n)$ interior lui $A \subseteq R^n$, dacă $\lim_{x_i \to a_i} E$ există şi este finită.

$$\frac{f(a_1,a_2,....,a_{i-1},x_i,a_{i+1},...,a_n)-f(a_1,a_2,...,a_{i-1},a_i,a_{i+1},....,a_n)}{x_i-a_i}=E$$

Se notează această limită cu $f'_{x_i}(a_1,a_2,...,a_n)$ sau $\frac{\partial f(a_1,a_2,...,a_n)}{\partial x_i}$

Observaţii:

1) Când calculăm derivata parţială în raport cu x, variabila y este considerată constantă şi derivăm ca şi cum am avea o singură variabilă x. Asemănător când calculăm derivata parţială în raport cu y.
2) Observaţia se menţine şi în cazul unei funcţii reale cu mai mult de două variabile reale.

Derivate parţiale de ordin superior

$f: D_1 \subseteq R^1 \to R$

Derivata de ordinul întâi:

$$y' = \frac{df}{dx}$$

Derivata de ordinul al II- lea:

$$y'' = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

Definiţia 2.21. *Fie $f: D \subseteq R^2 \to R$ o funcţie de două variabile $z = f(x,y)$, derivabilă parţial în raport cu ambele variabile pe D, astfel încât fiecare derivată parţială este de asemenea derivabilă parţial.*

Se pot obţine atunci derivate parţiale de ordinul doi ale funcţiei f în următoarele moduri:

i) Derivând de două ori în raport cu x:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

ii) Derivând întâi în raport cu x şi apoi în raport cu y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

iii) Derivând întâi în raport cu y şi apoi în raport cu x:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

iv) Derivând de două ori în raport cu y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Observaţii:

1) Derivatele parţiale

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

se numesc derivate parţiale mixte de ordinul 2.

2) În notaţie „fracţionară” a calcula

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

înseamnă a deriva întâi în raport cu variabila y şi apoi în raport cu x, adică derivăm în ordine inversă apariţiei variabilelor la numitorul „raportului de derivare” (asemănător cu situaţia întâlnită la compunerea funcţiilor), spre deosebire de notaţia

„indicială” f''_{yx}, în care ordinea scrierii variabilelor corespunde ordinii în care efectuăm derivările parţiale.

Definiţia 2.22. *Fie*

$$f : D \subseteq R^n \to R$$

o funcţie de n variabile, derivabilă parţial pe D în raport cu fiecare variabilă, astfel încât fiecare derivată parţială este la rândul ei derivabilă parţial. Derivata parţială de ordinul doi în raport cu variabilele x_i *şi* x_j *este atunci funcţia:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = f''_{x_i x_j}$$

Teorema (CRITERIUL LUI SCHWARZ):

Dacă $f : D \subseteq R^n \to R$ *este o funcţie de n variabile, iar* $A \in D$ *un punct din domeniul de definiţie, în care f,* f'_{x_i}, f'_{x_j}, $f''_{x_i x_j}$ *şi* $f''_{x_j x_i}$ *sunt continue, atunci are loc egalitatea:*

$$f''_{x_i x_j}(A) = f''_{x_j x_i}(A).$$

Corolarul 2.1. Dacă o funcţie f admite derivate mixte continue, atunci aceste derivate mixte sunt egale.

Definiţia 2.23. *O funcţie*

$$f : D \subseteq R^n \to R$$

de n variabile se numeşte funcţie de clasă C^k *pe D (şi scriem* $f \in C^k(D)$*) dacă f admite derivate parţiale de ordinul k pe D, iar acestea sunt funcţii continue pe D.*

Definiţia 2.24. *O funcţie* $f : D \subseteq R^n \to R$ *de n variabile se numeşte funcţie de clasă* C^∞ *pe D (şi scriem* $f \in C^\infty(D)$*), dacă f este de clasa* C^k *pe D pentru orice număr natural k.*

Observaţie:

Orice polinom de n variabile este o funcţie de clasa C^∞ pe R^n.

Gradient. Diferenţiala

f – funcţie de n variabile
$D \subset R^n$; D – mulţime deschisă
$f : D \subseteq R^n \to R$, $A \in D$
f – derivabilă parţial în raport cu fiecare variabilă în raport cu punctul A.
$\nabla f(A)$ = gradientul lui f în punctul A;
$\nabla f(A)$ = vector

$$\nabla f(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \frac{\partial f}{\partial x_2}(A), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \right)$$

Dacă f este derivabilă parţial pe D.
$\nabla f(A)$ = funcţie vectorială

$$\nabla f : D \to R^n;$$

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

$$\forall x \in D$$

Exemplul 2.3.

$$f : R^4 \to R;$$

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_1 x_2 x_3 + \frac{x_4}{x_1}$$

$$\nabla f(x) = (f'_{x_1}(x), f'_{x_2}(x), f'_{x_3}(x), f'_{x_4}(x)) =$$

$$= \left(2x_1 + 3x_2 x_3 - \frac{x_4}{x_1^2},\ 2x_2 + 3x_1 x_3,\ 3x_1 x_2,\ \frac{1}{x_1} \right)$$

Definiţia 2.25. *Fie*

$$f : D \subseteq R^n \to R$$

o funcţie de n variabile definită pe o mulţime deschisă $D \subseteq R^n$ şi $A \in D$ un punct al domeniului de definiţie. Spunem că f este diferenţiabilă în punctul A dacă există o aplicaţie liniară

$$T : R^n \to R;$$

şi o funcţie

$$g : V_0 \to R;$$

unde V_0 este o vecinătate a originii spaţiului R^n, astfel încât:

$$A + V_0 \subseteq D,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(\Delta x)}{\|\Delta x\|} = 0$$

şi are loc egalitatea

$$f(A + \Delta x) - f(A) = T(\Delta x) + g(\Delta x$$

Dacă funcţia f este diferenţiabilă în punctul A, forma liniară T de mai sus se numeşte diferenţiala funcţiei f în punctul A şi se notează $d_A f$.

Exemplul 2.4. Orice formă liniară $f:R^n \to R$ este diferenţiabilă în orice punct $A \in R^n$ şi $d_A f = f \quad \forall A \in R^n$.

Propoziţia 2.3. *Fie f derivabilă parţial în raport cu toate variabilele pe o vecinătate a unui punct A al domeniului de definiţie, astfel încât derivatele parţiale sunt continue în A atunci f este diferenţiabilă în punctul A şi*

$$d_A f(H) = \langle \nabla f(A), H \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) * h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A) * h_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) * h_n, \forall H \in R^n$$

Propoziţia 2.4. *Dacă*

$$f : D \subseteq R^n \to R$$

este o funcţie diferenţiabilă în punctul $A \in D$, atunci f este continuă în acel punct.

Propoziţia 2.5. *Fie f şi g funcţii de n variabile, diferenţiabile pe o mulţime deschisă $D \subseteq R^n$, iar $\alpha \in R$ un scalar oarecare. Atunci funcţiile f + g şi αf sunt diferenţiabile pe D şi au loc egalităţile:*

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$$
$$\nabla(\alpha f) = \alpha \nabla f$$

Observaţie:

Din această propoziţie deducem că mulţimea funcţiilor diferenţiabile pe o mulţime deschisă are o structură de spaţiu vectorial real.

Definiţia 2.26. *Fie*

$$f : D \subseteq R^n \to R$$

o funcţie de n variabile derivabilă parţial de două ori în raport cu fiecare variabilă pe mulţimea deschisă $D \subseteq R^n$ şi $A \in D$ un punct al domeniului de definiţie al lui f.

Matricea hessiană a funcţiei f în punctul A este matricea

$$H_f(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(A) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(A) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(A) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(A) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(A) \end{pmatrix}$$

Observaţie:

Dacă derivatele parţiale mixte ale funcţiei f sunt continue, din criteriul lui SCHWARZ rezultă că matricea
hessiană a funcţiei f este simetrică

$$f : D \subseteq R^n \to R$$

n=1

f este diferenţiabilă în x_0 $\Leftrightarrow$ f este derivabilă în x_0.

Observaţie:

Expresia $f'(x_0)(x-x_0)$ se numeşte diferenţiala lui f în punctul x_0 şi se notează $df(x_0)(h) = f'(x_0)h$ unde $h = x-x_0$.

Exemplul 2.5.

$$f : D \subseteq R^1 \to R;$$
$$n = 1$$
$$f : R \to R;$$
$$f(x) = x$$
$$df(x_0) * h = 1 * h$$
$$df(x) = dx$$

Exemplul 2.6.

$$g : R \to R;$$
$$g(x) = arctg\ \frac{1}{x}$$
$$g'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$
$$dg(x_0) * h = -\frac{1}{1+x^2} * h$$
$$dg(x) = -\frac{dx}{1+x^2}$$

Exemplul 2.7.

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$
$$\Rightarrow df(x) = f'(x) * dx$$

Reguli de diferenţiere:

1) d(u+v) = du + dv
2) d(αu) = αdu
3) d(u/v) = (vdu-udv)/v²
4) d(u*v) = vdu + udv
5) d(f(u(x))) = f'(u)*du

Cazul

$$f : D \subseteq R^2 \to R;$$
$$n = 2$$

Definiţia 2.27. *Se numeşte diferenţiala funcţiei f în punctul (x_0, y_0) şi se notează df(x_0, y_0)(h, k) o funcţie liniară în h şi k dată de expresia:*

$$df(x_0, y_0)(h,k) = f'_x(x_0, y_0) * h + f'_y(x_0, y_0) * k$$
$$h = x - x_0$$
$$k = y - y_0$$

Observaţie:

Diferenţiala o scriem în forma finală:

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0) * dy\ .$$

Într-un punct curent:

$$df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} * dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) * dy$$

Cazul funcţiei de n variabile:

$$f : D \subseteq R^n \to R;$$

$$df(x',...,x^n) = \frac{\partial f}{\partial x'}(x', x^2,...,x^n) * dx' + \frac{\partial f}{\partial x^2}(x', x^2,...,x^n) * dx^2 +$$
$$+ ...... \frac{\partial f}{\partial x^n}(x', x^2,...,x^n) * dx^n$$

Diferenţiala de ordin superior:

$$f : D \subseteq R^1 \to R;$$
$$n = 1$$
$$df(x) = f'(x) * dx$$
$$d(df(x)) = d^2 f(x)$$
$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x) * dx) = d(f'(x)) * dx + f'(x) * d(dx) =$$
$$= f'' dx^2 + f'(x) * d^2 x = f'' dx^2$$
$$d^2 f(x) = f''(x) dx^2$$
$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$
$$\Rightarrow d^2 f(x) = f''(x) dx^2$$

Analog

$$d^n f(x) = d[d^{n\ 1} f(x)]$$
$$d^n f(x) = f^n(x) dx^n$$
$$f^n(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$
$$n = 2; f : D \subseteq R^2 \to R$$
$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} * dx + \frac{\partial f}{\partial y} * dy$$
$$d = \quad \frac{\partial}{\partial x} * dx + \frac{\partial}{\partial y} * dy \qquad op.diferential$$
$$df(x, y) = \quad \frac{\partial}{\partial x} * dx + \frac{\partial}{\partial y} * dy \quad f$$

$$d^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f$$

În general pentru diferenţiala de ordinul n

$$d^n f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f$$

$$F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$$

Exemplul 2.8.

$$f(x,y) == 3[\sin(x+2y)]^2 + e^{x^2+xy}$$

$$F(x,y) = 3u^2 + v$$

$$u = \sin(x+2y)$$

$$v = e^{x^2+xy}$$

$$f(u,v) = 3u^2 + v$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) * \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} * \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) * \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} * \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) * \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) * \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Capitolul III

Extremele funcţiilor reale de mai multe variabile reale

Fie $f : D \subseteq R^n \to R$; $n \geq 1$.

Definiţia 3.1. *Un punct $P_0 = (a_1, a_2, \ldots.., a_n) \in D^0$ se numeşte punct de maxim local (respectiv minim local) al funcţiei $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dacă există o vecinătate V_{P_0} a punctului P_0 astfel încât pentru orice punct $P=(x_1,x_2,\ldots\ldots.,x_n) \in V_{P_0} \cap D$ să avem :*

$$f(P) \leq f(P_0), \text{ respectiv } f(P) \geq f(P_0) \qquad (3.1)$$

Observaţie:
Punctele de maxim şi de minim (local) se mai numesc şi puncte de extrem.
Punctele se numesc puncte de extrem local sau relativ.

Definiţia 3.2. *Dacă P_0 este un punct de maxim local (relativ) al funcţiei f, atunci valoarea sa în punctul P_0 , $f(P_0)$ se numeşte maxim local al funcţiei.*

Dacă P este un punct de minim local (relativ) al funcţiei f, atunci f (P) se zice că este minim local al funcţiei.

Observaţie:

Dacă putem alege vecinătatea V de rază destul de mică încât inegalităţile din definiţie să fie stricte, atunci vom zice că avem maxim local strict (respectiv minim local strict), sau că funcţia admite un maxim (respectiv minim) propriu.

Propoziţia 3.1. *Fie f o funcţie reală definită pe o mulţime deschisă $D \subset R^n$ $(n \geq 2)$. Dacă f admite un extrem local (relativ) în punctul $P_0 \in D^0$ şi dacă f este derivabilă* *parţial în acest punct în raport cu fiecare din variabilele x_k (k=1,2,....,n), atunci derivatele sale parţiale f'_{x_k} se anulează în acest punct, adică:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(P_0)=0 \qquad (k=1,2,\ldots\ldots n) \qquad (3.2)$$

Într-adevăr, fie $P_0 = (a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ punctul de extrem al funcţiei f, considerând funcţia parţială

$$f(x_k) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots\ldots, a_n)$$

definită pe mulţimea

$$D_k=\{ x_k / x_k \in R,\ (a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) \in D\}$$

care este derivabilă în punctul a_k

$f'(a_k) = f'_{x_k}(P_0)$, iar a_k este un punct de extrem al acestei funcţii şi punct interior mulţimii D_k, deci, conform teoremei lui Fermat, avem $f'(a_k)=0$, adică $f'_{x_k}(P_0)=0$.

Observaţii:

1) În R^1 reciproca teoremei lui Fermat nu este în general valabilă, adică dacă într-un punct derivata unei funcţii se anulează, acel punct nu este neapărat punct de extrem.
2) Propoziţia de mai sus este o condiţie necesară, dar nu şi suficientă pentru existenţa punctelor de extrem. Eventualele puncte de extrem se găsesc printre punctele în care derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei f se anulează.

Definiţia 3.3 *Un punct $P_0=(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n) \in D^0$ se numeşte punct staţionar al funcţiei f, dacă funcţia f este diferenţiabilă în punctul P_0 şi dacă diferenţiala sa este nulă în acest punct.*

$$df=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}dx_k$$

df =0 în punctul $P_0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(P_0)=0$; (k=1,2,...,n)

Observaţie:

În acele puncte P_0 în care diferenţiala este nulă, variaţia funcţiei în jurul punctelor respective este considerabil de mică, fapt care justifică denumirea de mai sus.

Propoziţia 3.2 *Orice punct de extrem local din interiorul mulţimii de definiţie D în care funcţia f(P) este diferenţiabilă, este un punct staţionar al funcţiei.*

Observaţii:

1) Propoziţia reciprocă nu mai este valabilă, în sensul că există puncte staţionare care nu sunt puncte de extrem.
2) $f : D_1 \subset R^1 \to R$; $f'(x_i) = 0$; x_i nu sunt puncte de extrem, ci de inflexiune.

Exemplul 3.1.a

$$f : D_2 \subseteq R^2 \to R \; ; \quad f(x, y) = 2x^2 - 2y^2$$

Funcţia este diferenţiabilă în origine, căci derivatele sale parţiale $f'_x(x,y) = 4x$; $f'_y = 4y$ sunt continue în $P_0=(0,0)$. Acest punct este punct staţionar al funcţiei f căci avem

$$f'_x(0,0) = 0 \; ; \; f'_y(0,0) = 0 \; ;$$

totuşi nu este un punct de extrem local al funcţiei, deoarece pentru punctele de forma $P=(x,0)$ din vecinătatea originii avem $f(P) - f(P_0) = 2x^2 \geq 0$, iar pentru punctele de forma $P'=(0,y)$ din aceeaşi vecinătate, $f'(P) - f'(P_0) = -2y^2 \leq 0$, relaţii care evidenţiază faptul că punctul $P_0 = (0,0)$ nu este un punct de extrem local.

Asemenea puncte, în cazul funcţiilor reale de două variabile se numesc puncte şa ale lui f (x,y).

Observaţie:

Dacă o funcţie de punct f este diferenţiabilă într-o mulţime deschisă $D' \subseteq R^n$, $n \geq 1$, punctele sale de extrem local (relativ) se găsesc printre punctele staţionare ale ei, adică printre soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, x_2, \dots\dots\dots, x_n) = 0 \\ f'_{x_2}(x_1, x_2, \dots\dots\dots, x_n) = 0 \\ \text{------------------------------} \\ f'_{x_n}(x_1, x_2, \dots\dots\dots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

După ce se determină soluţiile acestui sistem, care desigur, în general nu vor fi toate puncte de extrem ale funcţiei f (căci ele verifică doar condiţia necesară pentru a putea fi puncte de extrem), urmează să se precizeze care sunt acele puncte P_0 dintre soluţiile sistemului (3.3) pentru care diferenţa $\delta = f(P) - f(P_0)$ într-o vecinătate V a punctului P_0 păstrează acelaşi semn pentru orice punct $P \in V$.

Desigur, dacă $\delta \leq 0$ pentru orice $P \in V_{p_0}$, în P_0 funcţia f are maxim, iar dacă $\delta \geq 0$, în P_0 funcţia f are minim.

Teorema 3.1. *Dacă (x_0,y_0) este un punct staţionar al funcţiei f (x,y) şi dacă funcţia are derivate parţiale de ordinul doi, continue într-o vecinătate V_{p_0} a punctului $P_0 =(x_0\ y_0)$, atunci:*

[1] Dacă $(f''_{xy})^2 - f''_{x^2} * f''_{y^2} < 0$, derivatele parţiale fiind calculate în $(x_0\ y_0)$, atunci $(x_0\ y_0)$ este un punct de extrem local al funcţiei şi anume:

Când $f''_{x^2}(x_0\ y_0) > 0$, P_0 este punct de minim.

Când $f''_{x^2}(x_0\ y_0) < 0$, P_0 este punct de maxim.

[2] Dacă $(f''_{xy})^2 - f''_{x^2} * f''_{y^2} > 0$, atunci $(x_0\ y_0)$ nu este un punct de extrem al funcţiei f.

Demonstraţie. Notăm punctele p din vecinătatea punctului $p_0=(x_0,y_0)$ cu (x_0+h_1, y_0+h_2) oricare ar fi $h_1, h_2 \in R$, suficient de mici şi să aplicăm formula lui Taylor pentru a exprima variaţia funcţiei f in jurul punctului P_0 şi anume se mai scrie:

$$\delta = f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0,y_0)$$

$$\delta = \frac{1}{1!}\,[\,h_1 f'_x(x_0,y_0) + h_2 f'_y(x_0,y_0)] +$$

$$+\frac{1}{2!}[h_1^2 f''_{x^2}(x_0+\theta h_1\ ,\ y_0+\theta h_2) +$$

$$+ 2h_1 h_2\ + 2h_1 h_2 f''_{xy}(x_0+\theta h_1\ ,\ {}_0+\theta h_2) +$$

$$+ h_2^2 f''_{y^2}(x_0+\theta h_1\ ,\ y_0+\theta h_2)]$$

$$0<\theta<1$$

Vom nota valorile derivatelor de ordinul doi în punctul cercetat cu:

$$a_{11} = f''_{x^2}(x_0,y_0)$$

$$a_{12} = f''_{xy}(x_0,y_0)$$

$$a_{22} = f''_{y^2}(x_0,y_0)$$

şi ţinând cont de continuitatea funcţiilor f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2} vom avea:

$$f''_{x^2}, (x_0 + \theta h_1, y_0 + \theta h_2) = a_{11} + \alpha_{11}$$

$$f''_{xy}, (x_0 + \theta h_1, y_0 + \theta h_2) = a_{12} + \alpha_{12}$$

$$f''_{y^2}, (x_0 + \theta h_1, y_0 + \theta h_2) = a_{22} + \alpha_{22}$$

unde: $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22} \to 0$ odată cu $h_1 \to 0$, $h_2 \to 0$.

Luând în considerare că $P_0(x_0,y_0)$ este un punct staţionar, deci derivatele parţiale de ordinul întâi sunt nule în acest punct, diferenţa δ care exprimă variaţia funcţiei f în jurul punctului P se mai scrie:

$$\delta = \frac{1}{2!}[a_{11}h_1^2 + 2a_{12}h_1h_2 + a_{22}h_2^2 +$$

$$+\alpha_{11}h_1^2 + 2\alpha_{12}h_1h_2 + \alpha_{22}h_2^2\ ]$$

sau încă

$$\delta=\frac{h_2^2}{2!}\ [a_{11}(\frac{h_1}{h_2})^2+2a_{12}(\frac{h_1}{h_2})+a_{22}+\gamma(\alpha_{11},\alpha_{12},)]$$

unde γ este o formă liniară in $\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{22}$ care tinde către zero, deci semnul expresiei δ este hotărât de semnul trinomului de gradul II în $(\frac{h_1}{h_2})$. Ori pentru ca acest trinom să păstreze un acelaşi semn oricare ar fi h_1,h_2 v-a trebui să avem:

$$a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0\quad .$$

În aceste condiţii δ păstrează semnul lui a_{11} (coeficientul variabilei $\frac{h_1}{h_2}$ la pătrat) oricare ar fi h_1, h_2 suficient de mici astfel ca punctele $P=(x_0+h_1 y_0+h)$ să aparţină unei vecinătăţi V_{P_0} a punctului P_0 ori un punct de extrem local.

Rezultă imediat că dacă $a_{11}>0$, $\delta>0$ şi punctul considerat este punct de minim şi dacă $a_{11}<0$, $\delta<0$ deci P_0 este un punct de maxim.

În cazul în care $a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$, trinomul în $(\frac{h_1}{h_2})$ nu păstrează un acelaşi semn (căci având două rădăcini reale şi distincte pentru valori cuprinse între două rădăcini, avem semn contrar cu primul coeficient iar pentru cele care sunt în exterior acelaşi semn cu a_{11}), deci nu putem avea punct de extrem.

În cazul în care $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$, pentru a rezolva problema existenţei punctului de extrem trebuie să fie cercetate şi derivatele de ordin superior. Acest caz se tratează pe loc în cazurile concrete.

Observaţii:

În literatura de specialitate se folosesc notaţiile lui Monge (pentru o mai uşoară reţinere) pentru derivatele parţiale de ordinul doi ale funcţiei f(x,y) şi anume:

$$r = f''_{x^2}; \quad s = f''_{xy}; \quad t = f''_{y^2}$$

Condiţia suficientă pentru existenţa (sau absenţa) punctului de extrem se scrie sub forma:

1) Dacă în punctul staţionar $P_0 = (x_0, y_0)$ avem $s^2 - r\,t < 0$, atunci în acest punct avem un extrem local.
2) Dacă $s^2 - r\,t > 0$ în punctul P_0, nu avem nici un extrem local.

   Când $s^2 - r\,t = 0$ în $P_0 = (x_0, y_0)$ se cere discuţie specială de precizare.

Fie $f : D \subseteq R^n \to R$ o funcţie diferenţiabilă pe o mulţime deschisă $D \subseteq R^n$.

$$P_0 = (a_1, a_2, \ldots, a^n)$$

Pentru a determina punctele staţionare ale funcţiei f, se rezolvă sistemul format prin anularea derivatelor sale parţiale de ordinul întâi.

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 \\ f'_{x_2}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 \\ - - - - - - - - - - - - - - - - \\ f'_{x_n}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Se pune problema condiţiilor suficiente pentru existenţa (sau absenţa) extremelor printre punctele staţionare, adică a precizării acelor condiţii pe care trebuie să le verifice în plus aceste puncte.

Dacă $P_0 = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ este un punct staţionar şi dacă f are şi derivate de ordinul doi continue într-o vecinătate V_{P_0} a punctului P_0, atunci folosind formula lui Taylor şi ţinând cont de continuitatea derivatelor în punctul P_0 şi de faptul că derivatele parţiale de ordinul întâi sunt nule în acest punct, avem pentru variaţia δ în jurul lui P_0 expresia:

$$\delta = f(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots, a_n+h_n) - f(a_1, a_2, \ldots a_n) =$$

$$= \frac{1}{2!}\left(\sum_{i=1}^{n} h_1 \frac{\partial}{\partial Xi}\right)^{(2)} f(a_1+\theta h_1, \ldots, a_n+\theta h_n) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} h_1 \frac{\partial}{\partial Xi}\right)^{(2)} f(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

unde:

$$\lim_{h_1, h_2, \ldots, h_n \to 0} \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0.$$

Deci, pentru a decide apoi dacă punctul $P_0=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ este un punct de extrem local, trebuie să studiem pentru h_i suficient de mici, semnul expresiei:

$$\Phi = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{(2)} f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

care în variabilele h_i (i=1,2,…n) este un polinom omogen de gradul doi, sau o aşa-numită formă pătratică în variabilele h_i.

De natura acestei forme depinde rezolvarea problemei pe care o studiem şi anume:

1) Dacă forma pătratică Φ este definită atunci punctul $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ este punct de extrem local al funcţiei f şi anume este un punct de maxim după cum $\Phi<0$ sau $\Phi>0$.
2) Dacă forma pătratică Φ este nedefinită atunci punctul staţionar $P_0 = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nu este punct de extrem.

Observaţie:

În algebra superioară o formă pătratică

$$\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} y_i y_k \qquad (b_{ik} = b_{ki})$$

în variabilele $y_1, y_2, \ldots, y_n$ se numeşte pozitiv (respectiv negativ) definită, dacă ea ia valori pozitive (negative) pentru toate valorile argumentelor, nenule simultan.

Exemplul 3.1.b. Fie $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$, $(x,y) \in R^2$. Aflăm punctele staţionare. Pentru aceasta rezolvăm sistemul:

$$f_x'(x,y) = 3x^2 + 3y = 0$$
$$f_y'(x,y) = 3y^2 + 3x = 0$$

Obţinem soluţiile (0,0) şi (-1,-1). Calculăm acum derivatele parţiale de ordinul doi:

$$f_{x^2}''(x,y) = 6x;\ f''_{xy}(x,y) = 3;\ f''_{y^2}(x,y) = 6y$$

De aici

$$f_{x^2}''(0,0) = 0; \quad f''_{xy}(0,0) = 3;\ f_{y^2}(0,0) = 0$$

şi

$$f_{x^2}''(-1,-1) = -6;\ f''_{xy}(-1,-1) = 3;\ f''_{y^2}(-1,-1) = -6.$$

Avem

$$f''_{x^2}(0,0)\, f''_{y^2}(0,0) - [f''_{xy}(0,0)]^2 = -9 < 0,$$

deci (0,0) nu este punct de extrem.

Apoi

$$f''_{x^2}(-1,-1) f''_{y^2}(-1,-1) - [f''_{xy}(-1,-1)]^2 = 36 - 9 = 27 > 0,$$

deci (-1,-1) este punct de extrem.
Deoarece $f''_{x^2}(-1,-1) = -6 < 0$, rezultă că (-1,-1) este punct de maxim.

Exemplul 3.1.c. Se cere ca, dintr-o cantitate de tablă dată să se construiască un vas fără capac, având forma unui paralelipiped drept. Să se determine dimensiunile vasului astfel încât capacitatea lui să fie maximă.

Fie x, y, z dimensiunile paralelipipedului (x, y - dimensiunile bazei) şi a^2 unităţi de arie de tablă pusă la dispoziţie.

Funcţia al cărei maxim se cere este volumul V al paralelipipedului. Avem V = xyz şi $a^2 = xy + 2xz + 2yz$. Din a doua egalitate obţinem:

$$z = \frac{a^2 - xy}{2(x+y)}$$

şi deci

$$V(x,y) = \frac{xy(a^2 - xy)}{2(x+y)}$$

$$V'_x(x,y) = y^2(a^2 - 2xy - x^{2)}).\frac{1}{2(x+y)^2}$$

$$V'_y(x,y) = \frac{x^2(a^2 - 2xy - y^2)}{2(x+y)^2}$$

Punctele staţionare sunt soluţiile sistemului:

$$y^2 (a^2 - 2xy - x^2) = 0$$
$$x^2 (a^2 - 2xy - y^2) = 0$$

Soluţia (0,0) nu ne interesează deoarece nu corespunde din punct de vedere fizic problemei propuse. Mai obţinem soluţia:

$\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$ pe care o luăm în considerare în continuare.

Avem

$$V''_{x^2}(x,y)=\frac{-y^2(a^2+y^2)}{(x+y)^3}$$

$$V''_{xy}(x,y)=\frac{xy(a^2-2xy-x^2-y^2)}{(x+y)^3}$$

$$V''_{y^2}(x,y)=\frac{-x^2(a^2+x^2)}{(x+y)^3}$$

$$V''_{x^2}(a/\sqrt{3},a/\sqrt{3})=\frac{a}{-2\sqrt{3}};$$

$$V''_{xy}\ (a/\sqrt{3},a/\sqrt{3})=\frac{a}{-4\sqrt{3}};$$

$$V''_{y^2}(a/\sqrt{3},a/\sqrt{3})=\frac{a}{-2\sqrt{3}}$$

Aşadar,

$$V''_{x^2}(a/\sqrt{3},a/\sqrt{3})V''_{y^2}(a/\sqrt{3},a/\sqrt{3})-[V''_{xy}(a/\sqrt{3},a/\sqrt{3})]^2=$$

$$\frac{a^2}{12}-\frac{a^2}{48}{}'' \rangle 0$$

$$\text{V''}_{\text{x}^2}\ \left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{a}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{a}{2\sqrt{3}}\langle 0\ <0$$

adică volumul vasului este maxim dacă:

$$\text{x}=\text{y}=\frac{a}{\sqrt{3}}\ \text{şi z}=\frac{a}{3\sqrt{3}}\quad .$$

Observaţie:

Dacă

$f''_{x^2}(x_0, y_0)\, f''_{y^2}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 = 0$ nu putem afirma că punctul (x_0, y_0) este punct de extrem al funcţiei f. În unele cazuri (x_0, y_0) este punct de extrem, în alte cazuri nu este. În această situaţie este indicat a se face un studiu direct al semnului diferenţei

$$f(x,y) - f(x_0, y_0).$$

Exemplul 3.1.d. Fie funcţia f definită în orice punct $(x,y) \in R^2$ prin relaţia:

$$f(x,y) = x^2 + y^4$$

Avem

$$f_x'(x,y) = 2x;\ f_y'(x,y) = 4y^3$$

şi $f_x' = 0$, $f_y' = 0$ în punctul (0,0). Deci (0,0) este punct staţionar al funcţiei considerate.

Apoi

$$f_{x^2}''(x,y) = 2,\ f''_{xy}(x,y) = 0;$$

$$f_{y^2}''(x,y) = 12y^2,$$

$$f_{x^2}''(0,0)\, f_{y^2}''(0,0) - [f''_{xy}(0,0)]^2 = 0.$$

Deci nu putem afirma nimic despre punctul (0,0).

Să observăm însă că $f(0,0) = 0$ şi $f(x,y) > 0$, pentru $(x,y) \neq (0,0)$, adică $f(x,y) - f(0,0) > 0$ şi deci (0,0) este un punct de minim al funcţiei.

Extreme condiţionate

Definiţia 3.4. *Fie $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ o funcţie reală definită pe o mulţime $E \subset R^n$ şi fie $A \subset E$.*

Spunem că funcţia f(x) are într-un punct $a \in A$ un extrem relativ la mulţimea A, dacă restricţia funcţiei f(x) la mulţimea A are în punctul a un extrem obişnuit.

A spune că funcţia f(x) are în punctul a un maxim (respectiv un minim) relativ la mulţimea A înseamnă că există o vecinătate V a lui a, astfel încât să avem

$$f(x) \geq f(a), \text{ respectiv } f(x) \leq f(a)$$

pentru orice punct $x \in V \cap A$.

Extremele funcţiei f(x) relative la o submulţime $A \subset E$ se numesc extreme condiţionate.

Mai departe, vom considera un sistem de $k < n$ funcţii reale $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_k(x)$ definite pe E, iar mulţimea A va fi definită ca mulţime a soluţiilor sistemului

$$\begin{cases} F_1(x_1,...,x_n) = 0 \\ F_2(x_1,...,x_n) = 0 \\ .... \\ F_k(x_1,...,x_n) = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Aşadar,

$A = \{ x \mid x \in E, F_1(x)=0, F_2(x)=0, \ldots, F_n(x)=0 \}$. În acest caz extremele funcţiei f(x) relative la mulţimea A se mai numesc extreme condiţionate de sistemul (3.4). A considera restricţia funcţiei $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la mulţimea A înseamnă a considera valorile funcţiei f numai pentru acele valori ale argumentelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ care verifică sistemul (3.4). Aceasta se exprima spunând că cele n variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt legate între ele prin cele k relaţii ale sistemului (3.4); extremele condiţionate ale funcţiei f(x) se mai numesc, de aceea, extreme cu legături.

Teorema următoare dă condiţii necesare de existentă a punctelor de extrem condiţionat.

Teorema 3.2. *Fie a un punct care verifică sistemul (3.4). Să presupunem că funcţia f(x) şi funcţiile $F_1(x),\dots,F_k(x)$ au derivate parţiale continue într-o vecinătate V a lui a şi că matricea funcţională* $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$ *are în punctul a rangul k (egal cu numărul relaţiilor sistemului (3.4)).*

Dacă a este punctul extrem al funcţiei f(x), condiţionat de sistemul (3.4), atunci există k numere $\lambda_1,\lambda_2, \dots, \lambda_k$, astfel încât să avem :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}+\lambda_1\frac{\partial F_1(a)}{\partial x_1}+\lambda_2\frac{\partial F_2(a)}{\partial x_1}+\dots+\lambda_k\frac{\partial F_k(a)}{\partial x_1}=0\\
&\frac{\partial f(a)}{\partial x_2}+\lambda_1\frac{\partial F_1(a)}{\partial x_2}+\lambda_2\frac{\partial F_2(a)}{\partial x_2}+\dots+\lambda_k\frac{\partial F_k(a)}{\partial x_2}=0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{\partial f(a)}{\partial x_n}+\lambda_1\frac{\partial F_1(a)}{\partial x_n}+\lambda_2\frac{\partial F_2(a)}{\partial x_n}+\dots+\lambda_k\frac{\partial f_k(a)}{\partial x_n}=0
\end{aligned}
\qquad (3.5)
$$

Demonstraţie:

Deoarece matricea funcţională $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$ are în punctul a rangul k, există un determinant funcţional de ordin k al acestei matrice, diferit de zero în punctul a.
Pentru a face o alegere, să presupunem că

$$\frac{D(F_1,F_2,\dots,F_k)}{D(x_1,x_2,\dots,x_k)}\neq 0\text{, în punctul a.}$$

Sistemul (3.4) se poate rezolva în raport cu variabilele $x_1, \dots, x_k$ în jurul punctului $a = (a_1,\dots, a_k, a_{k+1},\dots, a_n)$.

Într-adevăr, prin ipoteză avem $F_1(a)=0$, $F_2(a)=0$, ..., $F_n(a)=0$; funcţiile $F_1, \dots, F_k$ au derivate parţiale continue într-o vecinătate a lui a, iar iacobianul acestor funcţii în raport cu variabilele $x_1,\dots, x_k$ este diferit de zero în punctul a. Conform teoremei relative la sistemele de funcţii implicite, există o vecinătate $V^k \subset A$ a punctului $(a_1, \dots, a_k)$ în spaţiul R^k şi o vecinătate V^{n-k} a punctului $(a_{k+1},\dots, a_n)$ în spaţiul R^{n-k}, astfel încât pentru orice punct $(x_{k+1},\dots, x_n) \in V^{n-k}$ sistemul (3.4) să aibă o soluţie unică $(x_1, x_2,\dots, x_k)$ în V^k:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_{k+1},\dots,x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_{k+1},\dots,x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_k = \varphi_k(x_{k+1},\dots,x_n) \end{cases} \tag{3.6}$$

Avem

$$a_1 = \varphi_1(a_{k+1},\dots,a_n),$$

$$a_2 = \varphi_2(a_{k+1},\dots,a_n),\dots,a_k = \varphi_k(a_{k+1},\dots,a_n).$$

Funcţiile $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_k$ au derivate parţiale continue pe mulţimea V^{n-k}.

Să scriem că (3.6) este o soluţie a sistemului (3.4): pentru orice punct $(x_{k+1},\dots,x_n) \in V^{n-k}$ avem:

$$(3.7)\begin{cases} F_1(\varphi_1(x_{k+1},\dots,x_n),\dots,\varphi_k(x_{k+1},\dots,x_n);x_{k+1},\dots,x_n) = 0 \\ F_2(\varphi_1(x_{k+1},\dots,x_n),\dots,\varphi_k(x_{k+1},\dots,x_n);x_{k+1},\dots,x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_k(\varphi_1(x_{k+1},\dots,x_n),\dots,\varphi_k(x_{k+1},\dots,x_n);x_{k+1},\dots,x_n) = 0 \end{cases}$$

Diferenţialele acestor funcţii sunt nule pe V^{n-k}, în particular în punctul $(a_{k+1}, \ldots, a_n)$:

$$(3.8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}d\varphi_1+\dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}d\varphi_2+\ldots+\dfrac{\partial F_1}{\partial x_k}d\varphi_k+\dfrac{\partial F_1}{\partial x_{k+1}}dx_{k+1}+\ldots+\dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}dx_n=0 \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}d\varphi_1+\dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}d\varphi_2+\ldots+\dfrac{\partial F_2}{\partial x_k}d\varphi_k+\dfrac{\partial F_2}{\partial x_{k+1}}dx_{k+1}+\ldots+\dfrac{\partial F_2}{\partial x_n}dx_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial F_k}{\partial x_1}d\varphi_1+\dfrac{\partial F_k}{\partial x_2}d\varphi_2+\ldots+\dfrac{\partial F_k}{\partial x_k}d\varphi_k+\dfrac{\partial F_k}{\partial x_{k+1}}dx_{k+1}+\ldots+\dfrac{\partial F_k}{\partial x_n}dx_n=0 \end{cases}$$

În (3.8), $d\varphi_1,\ldots,d\varphi_k$ reprezintă diferenţialele funcţiilor $\varphi_1,\ldots,\varphi_k$ calculate în punctul $(a_{k+1},\ldots,a_n)$, iar $dx_{k+1},\ldots,dx_n$ sunt variabile independente; derivatele funcţiilor $F_1,\ldots,F_k$ sunt calculate în punctul $(a_1,\ldots,a_n)$. Să considerăm acum funcţia compusă

(3.9) $F(x_{k+1},\ldots,x_n)=$

$$= f(\varphi_1(x_{k+1},\ldots,x_n),\ldots,\varphi_k(x_{k+1},\ldots,x_n),x_{k+1},\ldots,x_n),$$

definită pentru $(x_{k+1},\ldots,x_n)\in V^{n-k}$. Deoarece funcţia $f(x_1,\ldots,x_n)$ are în punctul $a = (a_1,\ldots,a_n)$ un extrem, condiţionat de sistemul (3.4), funcţia $F(x_{k+1},\ldots,x_n)$ are în punctul $(a_{k+1},\ldots, a_n)$ un extrem obişnuit.

Într-adevăr,

$$a_1=\varphi_1(a_{k+1},\ldots a_n),\ldots a_k=\varphi_k(a_{k+1},\ldots a_n)$$

şi dacă de exemplu, a este un punct de maxim condiţionat pentru f(x), avem:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\geq f(a_1,a_2,\ldots,a_n)$$

pentru orice punct $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ care verifică sistemul (3.6), dintr-o anumită vecinătate a lui $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$. Atunci, pentru

$(x_{k+1},...,x_n) \in V^{n-k}$, luând valorile $x_1,\dots,x_k$ date de sistemul (3.6), punctul $(x_1,x_2,...,x_k;x_{k+1},...,x_n)$ verifică sistemul (3.4) aşa cum rezultă din (3.7), iar inegalitatea precedentă se scrie, ţinând seama de (3.9),

$$F(x_{k+1},...,x_n) \geq F(a_{k+1},...,a_n),$$

deci $(a_{k+1},...,a_n)$ este punct de maxim pentru funcţia F.

În acest caz diferenţiala acestei funcţii în punctul $(a_{k+1},...,a_n)$ este nulă:

(3.10) $$dF = \frac{\partial f}{\partial x_1}d\varphi_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}d\varphi_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_k}d\varphi_k + \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}dx_{k+1} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n = 0.$$

Şi aici, $d\varphi_1,...,d\varphi_k$ sunt diferenţialele funcţiilor $\varphi_1,...,\varphi_k$ în punctul $(a_{k+1},...,a_n)$, iar $dx_{k+1},...,dx_n$ sunt variabile independente; derivatele funcţiei f sunt calculate în punctul $(a_1,...,a_n)$.

Ţinând seama de ecuaţiile (3.8) şi (3.10), pentru orice sistem de numere $\lambda_1,...,\lambda_k$ avem egalitatea:

(3.11)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right)d\varphi_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \sum_{i-1}^{k}\lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial x_2}\right)d\varphi_2 + ...$$

$$... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)d\varphi_k + \left(\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial x_{k+1}}\right)dx_{k+1} + ...$$

$$... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial x_n}\right)dx_n = 0.$$

Vom alege numerele $\lambda_1,...,\lambda_k$ aşa fel încât coeficienţii diferenţialelor $d\varphi_1,d\varphi_2,...,d\varphi_k$ să se anuleze:

$$(*)\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}+\lambda_2\dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}+...+\lambda_k\dfrac{\partial F_k}{\partial x_1}=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda_1\dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}+\lambda_2\dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}+...+\lambda_k\dfrac{\partial F_k}{\partial x_2}=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_k}+\lambda_1\dfrac{\partial F_1}{\partial x_k}+\lambda_2\dfrac{\partial F_2}{\partial x_k}+...+\lambda_k\dfrac{\partial F_k}{\partial x_k}=0 \end{cases}$$

derivatele fiind calculate în punctul $a=(a_1,...,a_n)$.

Acest lucru este posibil, deoarece determinantul coeficienţilor lui $\lambda_1,...,\lambda_k$ din sistemul (*) este

$$\frac{D(F_1,...,F_k)}{D(x_1,...,x_n)},$$

calculat în punctul $(a_1,...,a_n)$, iar acesta este diferit de zero. Cu aceste valori obţinute pentru $\lambda_1,\lambda_2...,\lambda_k$, egalitatea (3.11) se scrie (derivatele funcţiilor f, F_1,…,F_k fiind calculate în $a=(a_1,...,a_n)$):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial x_{k+1}}\right)dx_{k+1}+...+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial x_n}\right)dx_n=0.$$

Pentru ca această egalitate să aibă loc pentru orice valori ale variabilelor independente dx_{k+1},…,dx_n este necesar şi suficient să se anuleze coeficienţii acestor variabile:

$$(**)\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_{k+1}}+\lambda_1\dfrac{\partial F_1}{\partial x_{k+1}}+\lambda_2\dfrac{\partial F_2}{\partial x_{k+1}}+...+\lambda_k\dfrac{\partial F_k}{\partial x_{k+1}}=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}+\lambda_1\dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}+\lambda_2\dfrac{\partial F_2}{\partial x_n}+...+\lambda_k\dfrac{\partial F_k}{\partial x_n}=0. \end{cases}$$

Egalităţile (*) şi (**) formează sistemul (3.5) de egalităţi ce trebuia demonstrat.

Observaţie: Orice punct $a = (a_1,...,a_n)$ care verifică sistemul (3.4) în care matricea funcţională $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$ are rangul k, şi care verifică şi sistemul (3.5) pentru anumite valori $\lambda_1,...,\lambda_k$ se numeşte punct staţionar al funcţiei f(x), condiţionat de sistemul (3.4); coeficienţii $\lambda_1, \lambda_2,...,\lambda_k$ se numesc multiplicatorii lui Lagrange. Valorile $\lambda_1,...,\lambda_k$ se schimbă odată cu punctul staţionar a.

Teorema de mai sus se poate enunţa astfel:

Orice punct de extrem condiţionat este punct staţionar condiţionat.

Afirmaţia reciprocă nu este, în general, adevărată: există puncte staţionare condiţionate în care funcţia nu are extreme condiţionate.

Să observăm că în sistemul (3.5) apar derivatele parţiale ale funcţiei

$$f(x) + \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + ... + \lambda_k F_k(x)$$

definită pentru $x = (x_1, x_2,...,x_n) \in$ E.

Astfel, pentru o funcţie f(x) cu derivatele parţiale continue pe o mulţime deschisă $E \subset R^n$, rezultă calea de urmat pentru aflarea punctelor staţionare condiţionate de sistemul (3.4) în care funcţiile $F_1(x),\ldots,F_k(x)$ au derivate parţiale continue pe E:

1) Se formează funcţia ajutătoare

$$\Phi(x_1,\ldots,x_n,\ldots, \lambda_1,\ldots, \lambda_k) = f(x) + \lambda_1F_1(x) + \lambda_2F_2(x)+\ldots+ \lambda_kF_k(x),$$

cu coeficienţii $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_k$ nedeterminaţi.

2) Se formează sistemul de n+k ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_k)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial\phi(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_k)}{\partial x_2} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial\phi(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_k)}{\partial x_n} = 0 \\ F_1(x_1,...,x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_k(x_1,...,x_n) = 0 \end{cases}$$

cu n+k necunoscute, x_1, x_2, …, x_n, λ_1, …, λ_k şi se caută soluţiile acestui sistem.

3) Dacă x_1, x_2, …, x_k, λ_1, …, λ_k este o soluţie a acestui sistem, atunci punctul (x_1, …, x_n) este punct staţionar condiţionat al funcţiei f(x).

Printre punctele staţionare condiţionate astfel obţinute se află şi punctele de extrem condiţionat ale funcţiei f(x).

Vom căuta acum condiţii suficiente care să ne permită să identificăm, dintre punctele staţionare, unele puncte de extrem condiţionat.

Fie a = (a_1, …,a_n) un punct staţionar al funcţiei f(x) condiţionat de sistemul (3.4). Aceasta înseamnă pe de o parte că F_1(a) = 0, …, F_k(a) = 0, iar pe de altă parte că există k numere λ_1,…, λ_k astfel ca să fie satisfăcut sistemul (3.5).

Vom presupune că funcţia f(x) şi funcţiile $F_1(x),\ldots, F_k(x)$ au derivate parţiale de ordinul doi, continue într-o vecinătate a punctului a.

Pentru a vedea dacă a este sau nu un punct de extrem condiţionat, va trebui să studiem semnul diferenţei

$$f(x) - f(a) = f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_n)$$

pentru punctele $x = (x_1,\ldots,x_n)$ care verifică sistemul (3.4), deci pentru care $F_1(x) = 0,\ldots,F_n(x) = 0$. Să observăm că, pentru asemenea puncte x, avem $\Phi(x) = f(x)$ şi deci

$$f(x) - f(a) = \Phi(x) - \Phi(a).$$

Aşadar, studiul semnului diferenţei f(x)–f(a), pentru punctele x care verifică sistemul (3.4), se reduce la studiul diferenţei

$$\Phi(x) - \Phi(a)$$

pentru asemenea puncte x. Dar punctul a verifică sistemul (3.5); aceasta înseamnă că a este punct staţionar obişnuit pentru funcţia Φ(x), deci derivatele sale parţiale de ordinul întâi se anulează în a.

Pe de altă parte, funcţia Φ(x) are derivate parţiale de ordinul doi continue într-o vecinătate a lui a, deci putem scrie formula lui Taylor de ordinul doi:

$$\Phi(x) - \Phi(a) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\phi(a)}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j + \frac{1}{2}\omega(x)\rho^2 = \frac{1}{2}d^2\varphi + \frac{1}{2}\omega\rho^2,$$

unde:

$$\lim_{x\to a}\omega(a) = 0 \text{ si } \rho = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2},$$

iar $dx = x_i - a_i$, $i = 1, 2,\ldots, n$.

Dacă diferenţiem relaţiile sistemului (3.4), obţinem k relaţii liniare în diferenţialele $dx_1,\ldots,dx_n$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}dx_n = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial F_2}{\partial x_n}dx_n = 0$$

....

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial F_k}{\partial x_n}dx_n = 0$$

derivatele parţiale fiind calculate în punctul a.

Deoarece matricea acestui sistem liniar este matricea funcţională $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$ care are rangul k, se pot exprima k diferenţiale în funcţie de celelalte n-k; introducând aceste k diferenţiale în formula lui Taylor de mai sus, obţinem în membrul drept o formă pătratică $\sum A_{ij}dx_idx_j$. După cum această formă pătratică este definită sau nu, diferenţa Φ(x) – Φ(a) = f(x) – f(a) păstrează în jurul lui a acelaşi semn sau nu păstrează acelaşi semn, adică a este sau nu este punct de extrem condiţionat. În cazul când $\sum A_{ij}dx_idx_j$ este definită pozitiv, avem un minim condiţionat, iar când este definită negativ, avem un maxim condiţionat.

f: D$\subseteq$ R^n →R; f(p)==f($x_1, x_2, \ldots, x_n$);A $\subseteq$ D

Definiţia 3.5. *Vom spune că funcţia f are într-un punct p_0 ∈A un extrem relativ la submulţimea A dacă restricţia ei la această mulţime are în punctul p_0 un extrem obişnuit. Acele extreme ale funcţie f care vor fi considerate numai relativ la submulţimea A⊂D se vor numi extreme condiţionate.*

În cazul funcţiilor de trei variabile avem:

$$f: D\subseteq R^3 \to R,\ A\subset D$$

submulţimea A este definită ca mulţime a soluţiilor sistemului

$$\text{a)}\ \begin{cases} g(x,y,z)=0 \\ h(x,y,z)=0 \end{cases}$$

adică A={(x,y,z)|g(x,y,z)=0,h(x,y,z)=0,(x,y,z)$\in$D}

Vom căuta extremele unei funcţii reale de trei variabile care sunt legate între ele de două relaţii de legătură g=0,h=0.

Fie p_0=(x_0, y_0, z_0); p_0 $\in$D;

p_0 verifică $\begin{cases} g(x,y,z)=0 \\ h(x,y,z)=0 \end{cases}$ Presupunem că funcţiile f, g, h au derivate parţiale continue într-o vecinătate V'_{P_0} .

Presupunem că cel puţin unul din determinanţii funcţionali ai funcţiilor g şi h în raport cu două din argumentele lor este diferit de zero în punctul considerat .

Fie b) $\dfrac{D(g,h)}{D(x,y)}\neq 0$ în P_0=(x_0,y_0,z_0)

Sistemul a) conform teoremelor relative la sistemele de funcţii implicite definite pe y şi z într-o vecinatate V$\subset$A ca funcţii de x adică

c) y=f_1(x), z=f_2(x) cu f_1(x_0)=y_0, f_2(x_0)=z_0

unde f_1 şi f_2 sunt funcţii obţinute pe o vecinătate V_{x_0} şi derivabilă în x_0 .

Putem considera funcţia F (ţinând cont de c) compusa:

d) F(x)=f(x,y(x),z(x)) definita pentru x$\in V_{x_0}$.

Pentru ca F să aibă un extrem local în x_0 trebuie ca

e) $\dfrac{dF(x_0)}{dx}$=0

f) $f'_x(p_0)+f'_y(p_0)y(x_0)+f'_z(p_0)$=0

Ţinând cont de c)$\Rightarrow$ din a) pentru $\forall$ x$\in V_{x_0}$

g) g[x,y(x),z(x)]≡0

h[x,y(x),z(x)]≡0

Derivând g) în raport cu x în punctul x_0 avem:

$$h) g'_x(p_0) + g'_y(p_0)y'(x_0) + g'_z(p_0)z'(x_0) = 0$$

$$i) h'_x(p_0) + h'_y(p_0)y'(x_0) + h'_z(p_0)z'(x_0) = 0$$

Relaţiile f), h), i) pentru a putea fi satisfăcute simultan în privinţa lui y' şi z' va trebui ca:

$$\text{j)} \quad \begin{vmatrix} f'_x(p_0) & f'_y(p_0) & f'_z(p_0) \\ g'_x(p_0) & g'_y(p_0) & g'_z(p_0) \\ h'_x(p_0) & h'_y(p_0) & h'_z(p_0) \end{vmatrix} = 0$$

În concluzie, pentru ca punctul $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ să fie un punct de extrem condiţionat al funcţiei f(x,y,z) supus relaţiilor de legătură g(x,y,z)=0, h(x,y,z)=0, trebuie să verifice ecuaţiile din a) şi relaţia din j).

S-au stabilit deci numai condiţiile necesare pentru ca punctul p_0 să fie un punct de extrem condiţionat de a) al funcţiei f Din punct de vedere practic rezultă că eventualele puncte de extrem condiţionat se găsesc printre soluţiile sistemului format din ecuaţiile:

$$\text{k)} \quad \begin{cases} \dfrac{D(f,g,h)}{D(x,y,z)} = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Uneori chiar sub această formă condiţiile pot fi folosite pentru găsirea extremelor condiţionate ale unei funcţii f, dacă din timpul problemei se ştie apriori că în interiorul domeniului considerat trebuie să existe un punct în care funcţia să-şi atingă marginea superioară (respectiv inferioară) a valorilor sale sau alte consideraţii.

Metoda mutiplicatorilor lui Lagrange

Din teoria determinanţilor se cunoaşte proprietatea că în cazul unui determinant nul între elementele coloanelor (liniilor) sale există o serie de relaţii liniare, cu coeficienţi care nu sunt simultan nuli şi care le putem scrie în cazul j) astfel :

$$\text{l)}\qquad \begin{cases} f'_x(p_0)+mg'_x(p_0)+nh'_x(p_0)=0, \\ f'_y(p_0)+mg'_y(p_0)+nh'_y(p_0)=0, \\ f'_z(p_0)+mg'_z(p_0)+nh'_z(p_0)=0 \end{cases}$$

Cu această consideraţie punctele staţionare care sunt eventuale puncte de extrem, vor fi funcţii ale sistemului

$$\text{m)}\qquad \begin{cases} f'_x+mg'_x+nh'_x=0 \\ f'_y+mg'_y+nh'_y=0 \\ f'_z+mg'_z+nh'_z=0 \\ g=0 \\ h=0 \end{cases}$$

unde m şi n sunt parametrii numiţi multiplicatorii lui Lagrange, care se schimbă odată cu punctul staţionar considerat.

(m) este un sistem de cinci ecuaţii cu cinci necunoscute(x,y,z,m,n). Pentru simplificarea scrierii si reţinerii condiţiilor de mai sus, de obicei se introduce funcţia auxiliară

n) $\phi = f + mg + nh$

cu ajutorul căreia ecuaţiile amintite mai sus apar ca obişnuitele ecuaţii necesare de extrem pentru funcţia auxiliară. Într-adevăr ele se pot scrie atunci:

o) $\Phi'_x=0, \Phi'_y=0, \Phi'_z=0$ sau încă

m) $d\Phi=0$

Metoda lui Lagrange conduce numai la condiţii necesare ca un punct să fie un eventual punct de extrem al unei funcţii date în anumite restricţii dinainte precizate .

Mulţimea R^n înzestrată cu structura de spaţiu liniar normat, în care s-a introdus o distanţă (metrică) cu ajutorul normei este deci şi un spaţiu metric. Vom obişnui să numim, în cele ce urmează, mulţimea R^n astfel organizată spaţiu euclidian liniar normat E^n cu n dimensiuni .

Exemplul 3.2. Să se găsească extremele locale ale funcţiei f:D⊆R^3→R definită prin :

$$f(x,y,z)=7x^2+7(x-1)^2+7(x+1)^2+7y^2+7(y-2)^2+7(y+2)^2+7z^2+7(z-3)^2+7(z+3)^2$$

Avem f'_x=14x+14(x-1)+14(x+1)

f'_y=14y+14(y-2)+14(y+2)

f'_z=14z+14(z-3)+14(z+3)

şi deci sistemul

$$f'_x=0;\ f'_y=0;\ f'_z=0$$

are singura soluţie x=0, y=0, z=0

Deci, avem un singur punct staţionar originea p_0=(0,0,0). Calculând derivatele parţiale de ordinul doi obţinem:

$$f''_{x^2} = f''_{y^2} = f''_{z^2} = 42 \qquad \text{şi} \qquad f''_{xy} = f''_{yz} = f''_{xz} = 0$$

Cercetând condiţia de suficienţă dată de natura formei $\Phi = f''_{x^2}(p_0)h_1^2 + f''_{y^2}(p_0)h_2^2 + f''_{z^2}(p_0)h_3^2 +$

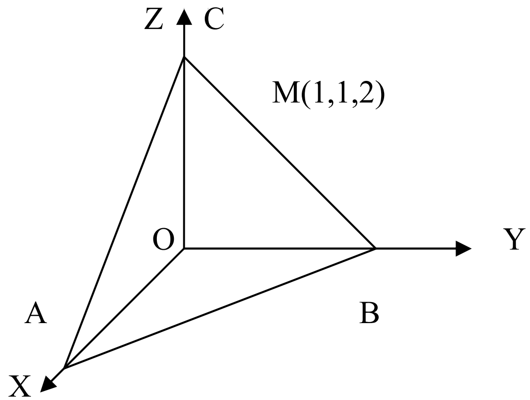
$2f''_{xy}(p_0)h_1h_2 + 2f''_{xz}(p_0)h_1h_3 + 2f''_{yz}(p_0)h_2h_3 =$

$=42(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)$ care este evident pozitivă oricare ar fi h_1, h_2, h_3. Rezultă deci că originea (0,0,0) este un punct de minim local al funcţiei date.

Exemplul 3.3. Se consideră un punct M(1,1,2) din E_3 raportat la axele rectangulare Ox ,Oy,Oz .

Se cere să se treacă un plan prin acest punct care formează cu planele de coordonate un tetraedru de volum minim. Care este ecuaţia planului P ?

(3.12) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$ ecuaţia unui plan care determină pe axele de coordonate tăieturile a,b,c



Volumul tetraedrului OABC este :

(3.13) $$\frac{abc}{6}$$

(3.14) $$M \in P \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}-1=0$$

Deci necunoscutele problemei noastre sunt tăieturile a, b, c care trebuie determinate astfel încât funcţia:

3.15) $f(a, b, c)=\frac{abc}{6}$ să admită un minim.

Avem deci de determinat un punct de extrem al funcţiei (3.15) în cazul în care variabilele ei verifică şi relaţia (3.14) care este relaţia de legătură g = 0.

Formând funcţia auxiliară

3.16) $$\phi = f + mg = \frac{abc}{6} + m\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}-1\right)$$

se scrie uşor sistemul

$$\begin{cases} d\Phi = 0 \\ g = 0 \end{cases}$$

care este echivalent cu:

3.17) $$\begin{cases} \Phi'_a = \dfrac{bc}{6} - \dfrac{m}{a^2} = 0 \\ \Phi'_b = \dfrac{ac}{6} - \dfrac{m}{b^2} = 0 \\ \Phi'_c = \dfrac{ab}{6} - \dfrac{2m}{c^2} = 0 \\ g = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{2}{c} - 1 = 0 \end{cases}$$

Înmulţind prima ecuaţie a sistemului (3.17) cu a, pe cea dea doua cu b, pe cea dea treia cu c şi apoi adunându-le obţinem:

$$a\Phi'_a + b\Phi'_b + c\Phi'_c = \left(\frac{abc}{6} - \frac{m}{a}\right) + \left(\frac{abc}{6} - \frac{m}{b}\right) +$$
$$+ \left(\frac{abc}{6} - \frac{2m}{c}\right) = 3\frac{abc}{6} \text{ - m } \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}\right) =$$
$$= \frac{abc}{2} \text{ m } \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}\right) = 0$$

$\frac{abc}{2}$ - m $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}\right) = 0$ din combinaţia primelor trei ecuaţii din (3.17). Din a patra ecuaţie din (3.17)

$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c} = 1$. Deci $\frac{abc}{2} - m = 0 \Rightarrow$ m = abc/2

$$\begin{cases} \Phi'_a = 0 \\ \Phi'_b = 0 \\ \Phi'_c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{bc}{6} - \dfrac{abc}{2}\dfrac{1}{a^2} = 0 \\ \dfrac{ac}{6} - \dfrac{abc}{2}\dfrac{1}{b^2} = 0 \\ \dfrac{ab}{6} - \dfrac{abc}{2}\dfrac{1}{c^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc(\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{2a}) = 0 \\ ac(\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{2b}) = 0 \\ ab(\dfrac{1}{6} - \dfrac{2}{2c}) = 0 \end{cases}$$

Obţinem a=3, b=3, c=6. Înlocuind aceste valori în m=abc/2 găsim m=27.

Deci pentru funcţia

f (a, b, c) = abc/6

în condiţiile problemei puse avem un singur punct de extrem p_0=(3,3,6).

Din contextul geometric al problemei reiese numai decât că (3,3,6) corespunde cazului de tetraedru cu volum minim, întrucât maximul volumului ar corespunde cazului când prin punctul M(1,1,2) s-ar considera plane paralele cu planele de coordonate (deci poziţii la limită).

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$ ecuaţia planului prin tăieturi unde a=3; b=3; c=6

Ecuaţia planului cerut este deci: $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} - 1 = 0$

Exemplul 3.4. Fie funcţia f definită pe R^2 prin egalitatea f(x,y) = xy. Să se afle punctele de extrem ale funcţiei f, condiţionate de ecuaţia $x^2 + y^2 = = a^2$.

Considerăm funcţia:

$$G(x, y) = xy + \alpha(x^2 + y^2 - a^2)$$

Punctele staţionare şi constanta α le determinăm din sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial x} = y + 2\alpha x = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} = x + 2\alpha y = 0 \end{cases}$$

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

Deoarece sistemul $y + 2\alpha x = 0$, $x + 2\alpha y = 0$, admite şi soluţii nebanale, determinantul

$$\begin{vmatrix} 2\alpha & 1 \\ 1 & 2\alpha \end{vmatrix} = 0$$

adică $4\alpha^2 - 1 = 0$. De aici obţinem $\alpha_1 = \frac{1}{2}$; $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$.

Pentru $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ găsim $x_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y_1 = -\frac{a}{\sqrt{2}}$

şi $x_2 = -\frac{a}{\sqrt{2}}$, $y_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Pentru $\alpha = -\frac{1}{2}$ găsim $x_3 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y_3 = \frac{a}{\sqrt{2}}$

şi $x_4 = -\frac{a}{\sqrt{2}}$, $y_4 = -\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Punctele staţionare, condiţionate de ecuaţia $x^2 + y^2 = a^2$, sunt $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$,

$\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right).$

Calculăm diferenţiala $d^2 G$ în fiecare din aceste puncte .

Pentru $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, avem $d^2 G = 2dxdy + dx^2 + dy^2$.

Pe de altă parte, diferenţiind ecuaţia $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, obţinem

$$xdx + ydy = 0$$

care în punctele $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ sau $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ ne conduce la $dx - dy = 0$, adică $dx = dy$.

Deci $d^2 G = 4dx^2$. Deoarece $4 > 0$, punctele $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ şi $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ sunt puncte de minim ale funcţiei f, condiţionate de ecuaţia $x^2 + y^2 = a^2$.

Pentru $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$, avem $d^2 G = 2dxdy - dx^2 - dy^2$ şi în punctele $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ sau $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, $dx = -dy$, adică $d^2 G = -4dx^2$.

Rezultă că $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ şi $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ sunt puncte de minim ale funcţiei f condiţionate de ecuaţia $x^2 + y^2 = a^2$.

Exemplul 3.5. Fie funcţia f definită pe orice $(x,y,z)\in R^3$ prin egalitatea f (x,y,z) = xy + yz + zx

Să se găsească extremele funcţiei f condiţionate de ecuaţia xyz = 1, pentru x >0, y >0, z >0.

Considerăm funcţia G(x , y , z)=f(x, y, z) +αF(x, y, z) Deoarece F(x , y , z) = xyz-1 avem

G (x , y , z) = xy + yz + zx + α(xyz-1)

De aici

$$\frac{\partial G}{\partial x} = y + z + \alpha yz$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = x + z + \alpha xz$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = y + x + \alpha xy$$

Formăm sistemul

$$\begin{cases} y+x+\alpha yz=0 \\ x+z+\alpha xz=0 \\ y+x+\alpha xy=0 \\ xyz-1=0 \end{cases}$$

Soluţia acestui sistem este x =1, y = 1, z = 1, α = -2. Punctul (1,1,1) este punct staţionar al funcţiei f condiţionat de ecuaţia xyz = 1.

Pentru a vedea dacă (1 , 1 , 1) este punct de extrem condiţionat , calculăm diferenţiala d^2 G în punctul (1 , 1 , 1).

Avem

$$\frac{\partial G}{\partial x} = y + z - 2yz; \frac{\partial G}{\partial y} = x + z - 2xz; \frac{\partial G}{\partial z} = y + x - 2xy;$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = 1 - 2z;$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z} = 1 - 2x;$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z \partial x} = 1 - 2y$$

În punctul (1 , 1 , 1) $\quad \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = 0$

iar $\quad \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial x} = -1$

Rezultă că în punctul (1 , 1 , 1)

$$d^2 G = -(dxdy + dydz + dzdx)$$

Pe de altă parte, diferenţiind ecuaţia xyz = 1 obţinem

$$yzdx + xzdy + xydz = 0$$

iar în punctul (1 , 1 , 1) avem

$$dx+dy+dz=0$$

De aici obţinem

$$dz = - dx - dy$$

Înlocuind dz în $d^2 G$ rezultă

$$d^2 G = dx^2 + dxdy + dy^2$$

Această formă pătratică este definită pozitiv, deci punctul (1, 1,1) este un punct de minim condiţionat.

Metoda celor mai mici pătrate

Regresia este o metodă ce operează pe un eşantion de observaţii cu scopul de a deduce şi generaliza concluziile asupra întregii populaţii statistice. Din acest motiv este necesar să distingem între „adevărata ecuaţie (dreaptă) de regresie” pe de o parte:

$$v_i=\alpha+\beta u_i+\varepsilon_i\ ;\ i=1,2,\ldots..n$$

(unde α şi β desemnează parametrii ce specifică în mod unic modelul relativ la întreaga populaţie statistică) şi ecuaţia determinată pe baza unui eşantion oarecare, pe de altă parte:

$$v_i = m + pu_i + e_i\ ;\quad i=1,2,\ldots..n$$

unde m şi p reprezintă estimaţii ale parametrilor α, respectiv β iar n este volumul eşantionului. Trebuie, de asemenea, să discriminăm între termenul oarecare ε_i semnificând abaterile valorilor y_i de la mediile condiţionate şi reziduurile estimate ale modelului notate cu e_i care reprezintă abaterile dintre valorile observate şi cele ajustate.

Estimatorii m şi p ai parametrilor necunoscuţi α şi β pot fi determinaţi din condiţia să minimizeze suma pătratelor reziduurilor $e_i = v_i-m-pu_i$, deci rezultă ca argumente ale criteriului de minim:

$$\arg\min F(m,p) = \arg\min \sum_{i=1}^{n}(v_i - m - pu_i)^2$$

cunoscut sub numele de criteriul celor mai mici pătrate ordinare. Formulată ca o problemă de optimizare, determinarea estimaţiilor m şi p face apel la condiţiile necesare de ordinul întâi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(m,p)}{\partial m} = 0 \\ \dfrac{\partial F(m,p)}{\partial p} = 0 \end{cases}$$

unde $\quad F(m,p)=\sum_{i=1}^{n}(v_i - m - pu_i)^2$

Exemplul 3.6. Fie funcţia f(x) = ax+b , x $\in$ R , pentru care experimental s-au obţinut perechile de valori (x_i,y_i) (i = $\overline{1,n}$) şi se doreşte a se determina (a,b) aşa încât pentru Y_i= ax_i+ b(i= $\overline{1,n}$), suma pătratelor abaterilor (Y_i-y_i), notată $\sum_{i=1}^{n}$ (Y_i-y_i)^2 să fie minimă . Aşadar se obţine o funcţie de două variabile

$$h(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(Y_i - y_i)^2 == \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$$

al cărui punct de minim (a_0,b_0) trebuie obţinut .
Avem :

$$\nabla h(a,b)=(2a\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2} + 2b\sum_{i=1}^{n}x_i - 2\sum_{i=1}^{n}x_i y_i ;$$
$$2a\sum_{i=1}^{n}x_i + 2nb - 2\sum_{i=1}^{n}y_i)$$

$$H_h(a,b)=\begin{pmatrix} 2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 & 2\sum_{i=1}^{n}x_i \\ 2\sum_{i=1}^{n}x_i & 2n \end{pmatrix} ; \quad \Delta_1 = 2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 > 0 ; \quad \Delta_2 = 4n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$$

Admitem că n ≥ 2 şi cel puţin două valori , x_i, x_j sunt definite ($x_i \neq x_j$) rezultă $\Delta_2 > 0$. Adică H(a,b) este pozitiv definită şi deci h este strict convexă .

Atunci soluţia lui $\nabla h = 0$ este punct de minim global. Rezolvăm sistemul liniar (în necunoscutele a,b).

$$\Delta h = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)a + \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)b = \sum_{i=1}^{n}x_i y_i ;$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i & \text{n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \text{n} \end{vmatrix}} \quad ; \quad b_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \text{n} \end{vmatrix}}$$

Soluţia sa unică (a_0, b_0) este punctul de minim căutat.

Dacă asupra parametrilor a, b se impun condiţii aşa încât $(a,b) \in M \subset R^2$ şi M este închisă , se ajunge la o problemă cu restricţii pentru care extremul liber (dacă există, când intM = Ø) nu mai este , în general , extremul căutat.

Analog se procedează dacă funcţia este liniară în trei sau mai mulţi parametri.

Se ajunge la un sistem de ecuaţii de gradul unu cu necunoscutele aceşti parametrii.

Capitolul IV

Ecuaţii diferenţiale

4.1. Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale

Definiţia 4.1. *Se numeşte ecuaţie diferenţială ordinară de ordinul unu o ecuaţie de forma:*

(4.1) $$F(t,x,\dot{x})=0$$

unde t este argumentul funcţiei necunoscute x = x(t) şi $\dot{x}=\frac{dx}{dt}(t)$ *este derivata sa.*

F este o funcţie reală definită pe un anumit domeniu al spaţiului R^3 .

Definiţia 4.2. *Se numeşte soluţie a ecuaţiei* $F(t,x,\dot{x})=0$ *pe intervalul I = (a, b) al axei reale, o funcţie x:I→ R continuu diferenţiabilă pe I şi care verifică ecuaţia* $F(t,x,\dot{x})=0$ *pe I, adică* $F(t,x(t),\dot{x}(t))=0 \quad \forall\, t \in I$.

Observaţii:

1) În anumite situaţii, care pot fi precizate cu ajutorul teoremei funcţiilor implicite, ecuaţia $F(t,x,\dot{x})=0$ se poate scrie sub forma:

   (4.2) $$\dot{x}=f(t,x)$$

   unde f : $\Omega \to$ R, Ω fiind o mulţime deschisă din R^2. Forma (4.2) $\dot{x}=f(t,x)$ se numeşte formă normală.

2) Din punct de vedere geometric, o soluţie a ecuaţiei $F(t,x,\dot{x})=0$ este o curbă în planul xot, având în fiecare punct al său tangentă care variază continuu cu punctul. O

asemenea curbă se numeşte curbă integrală a ecuaţiei $F(t,x,\dot{x})=0$.

Definiţia 4.3. *Mulţimea soluţiilor ecuaţiilor* $F(t,x,\dot{x})=0$ *se numeşte soluţie generală.*

Definiţia 4.4. *Prin problema Cauchy asociată ecuaţiei* $F(t,x,\dot{x})=0$ *se înţelege determinarea unei soluţii* $x = x(t)$ *a ecuaţiei* $F(t,x,\dot{x})=0$ *care să verifice condiţia iniţială*

(4.3) $$x(t_o) = x_o$$

unde $t_o \in I$, $x_o \in R$ *sunt date şi se numesc valori iniţiale.*

Definiţia 4.5. *Prin soluţie a sistemului diferenţial de ordinul unu de forma*

(4.4) $\dot{x}_i = f_i\ (t, x_1,..., x_n)$ $i = 1, 2, ..., n;$ *unde* $t \in I$; $f_1, ..., f_n$ *sunt funcţii date pe o mulţime deschisă a spaţiului* R^{n+1}, *se înţelege un sistem de funcţii* $\{x_1(t),...,x_n(t)\}$ *continuu diferenţiabile pe intervalul* $I \subset R$ *şi care verifică ecuaţiile* $\dot{x}_i = f_i\ (t, x_1,..., x_n)$ *pe acest interval adică*

(4.5) $$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_1(t),..., x_n(t)) \ \ \forall t \in I\ ;\ i=\overline{1,n}$$
$$x_i(t_o) = x_i^o \qquad i=\overline{1,n}$$

unde $t_o \in I$ *şi* $\{x_i^o; i=\overline{1,n}\}$ *este un element fixat al spaţiului* R^n.

Definiţia 4.6.

Numim problema $\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_1(t),..., x_n(t))$

$x_i(t_o) = x_i^o$ $\forall t \in I; i=\overline{1,n}$ *problemă Cauchy asociată sistemului diferenţial* $\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_1(t),..., x_n(t))$.

Definiţia 4.7. *Se numeşte ecuaţie ordinară de ordin n o ecuaţie de forma*

(4.6) $$F(t, x, \dot{x}, ..., x^{(n)}) = 0$$

unde F este o funcţie dată.

Observaţie:

Presupunând că este posibilă rezolvarea în raport cu derivata de ordinul n se poate reduce ecuaţia (4.6) la forma

(4.7) $x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, ... x^{(n-1)})$ numită forma normală.

Definiţia 4.8. *Prin soluţie a ecuaţiei (4.7) pe intervalul* $I \subset R$ *se înţelege o funcţie* x *de clasă* C^n *pe I (adică continuu diferenţiabilă până la ordinul n inclusiv) care verifică ecuaţia (4.7) în orice punct* $t \in I$.

Definiţia 4.9. *Prin problemă Cauchy asociată ecuaţiei (4.7) se înţelege determinarea unei soluţii* $x = x(t)$ *a ecuaţiei (4.7) care verifică condiţiile:*

$$x(t_o) = x_o^o, \dot{x}(t_o) = x_1^o, ..., x^{(n-1)}(t_o) = x_{n-1}^o$$

unde $t_o \in I$, $x_o^o, x_1^o, ... x_{n-1}^o$ *sunt fixate.*

Definiţia 4.10. *O funcţie f este analitică dacă în vecinătatea oricărui punct al domeniului de definiţie f admite o dezvoltare tayloriană.*

Teorema de existenţă şi unicitate pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul unu. *Fie problema Cauchy*

(*) $$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_o) = x_o \end{cases}$$

unde f este o funcţie reală definită în domeniul

$$\Delta = \{(t, x) \in R^2 \ ; \ |t - t_o| \le a, |x - x_o| \le b \}$$

Presupunem verificate următoarele condiţii:

i) funcţia f este continuă pe Δ

ii) funcţia f este lipschitziană ca funcţie de x pe mulţimea Δ*, adică există o constantă pozitivă L astfel încât*

$$\left|f(t,x)-f(t,y)\right|\le L|x-y| \quad \forall (\mathrm{t},\mathrm{x}),(\mathrm{t},\mathrm{y})\in\Delta$$

Atunci există o soluţie unică x = x(t) a problemei Cauchy (*) definită pe intervalul $|t-t_0| \le \delta$ *unde*

$$\delta=\inf\left(a,\frac{b}{M}\right)\ ;\ M=\sup\left\{\left|f(t,x)\right|\ ;\ (t,x)\in\Delta\right\}.$$

Teorema de existenţă şi unicitate pentru sisteme diferenţiale de ordinul 1. *Considerăm sistemul diferenţial*

(*) $\dot{x}_i = f_i(t,x_1,...,x_n)\ \ i=\overline{1,n}$ *cu condiţiile iniţiale*

(**) $x_i(t_o)=x_1^0\quad i=\overline{1,n}$ *unde funcţiile* f_i *sunt definite pe un paralelipiped de forma:*

$$\Delta=\left\{\left|t-t_o\right|\le a,\left|x_i-x_i^0\right|\le b\ \ i=\overline{1,n}\right\}$$

din spaţiul n+1 dimensional R^{n+1}.

Presupunem îndeplinite următoarele condiţii:

j) funcţiile f_i *,* $i=\overline{1,n}$ *sunt continue pe* Δ.

jj) funcţiile f_i *sunt lipschitziene în x = (*x_1 *, ...,* x_n*) pe* Δ *adică există L > 0 astfel încât*

$$\left|f_i(t,x_1,...,x_n)-f_i(t,y_1,...,y_n)\right|\le L\max\left\{\left|x_j-y_j\right|\ ;\ 1\le j\le n\right\}\mathrm{in}\ \Delta$$

Atunci există o soluţie unică $x_i=\varphi_i(t)\ \ i=\overline{1,n}$ *a sistemului (*) cu condiţia iniţială (**), definită pe intervalul*

$$I=\{t\ ;\ |\ t-t_o\ |\ \le\delta\};\ \delta=\inf\left(a,\frac{b}{M}\right)$$

unde $M=\max\{|f_i(t, x_1, ..., x_n)|\ ;(t, x_1, ..., x_n)\in\Delta\}$

Teorema de existenţă şi unicitate pentru ecuaţii diferenţiale de ordin superior. *Să considerăm ecuaţia diferenţială de ordin n*

(o) $x^{(n)} = g(t, x, \dot{x}, ..., x^{(n-1)})$ *cu condiţiile iniţiale*

(oo) $x(t_o) = x_o^o, \dot{x}(t_o) = x_1^0, ..., x^{(n-1)}(t_o) = x_{n-1}^0$ *unde*

$(t_o, x_0^0, x_1^0, ..., x_{n-1}^0)$ *este fixat în R^{n+1}, iar funcţia g verifică următoarele două condiţii:*

e) g este o funcţie continuă pe mulţimea

$$\Delta = \left\{(t, x_1, ...x_n) \in R^{n+1} \ ; \ \left|t - t_o\right| \le a, \left|x_i - x_{i-1}^0\right| \le b \ ; \ i = \overline{1,n} \ \right\}$$

ee)Există L>0 astfel încât

$$\left|g(t, x_1, ..., x_n) - g(t, y_1, ..., y_n)\right| \le L \max\left\{\left|x_i - y_i\right| \ ; \ 1 \le i \le n\right\}$$

pentru toţi $(t, x_1, ..., x_n)$ şi $(t, y_1, ..., y_n)$ în Δ.

Presupunem verificate condiţiile (e) şi (ee). Atunci problema Cauchy (o) + (oo) admite soluţia unică x = x(t) definită pe intervalul $[t_o - \delta, t_o + \delta]$, unde $\delta = \inf\left(a, \frac{b}{M}\right)$

şi $M = \sup\left\{g(t, x_1, ..., x_n), \left|x_1\right|, ..., \left|x_n\right|; (t, x_1, ..., x_n) \in \Delta\right\}$

4.2. Integrale prime

4.2.1. Integrale prime ale sistemelor diferenţiale autonome

Fie sistemul diferenţial autonom (1°) $\dot{x} = f(x)$ $x = (x_1, ..., x_n)$, unde f:D$\rightarrow$R^n este o funcţie de clasă C' pe o mulţime deschisă D a spaţiului R^n.

Definiţia 4.11. *Funcţia scalară $U(x) = U(x_1, ..., x_n)$ de clasă C' într-o submulţime deschisă $D_o \subset D$ se numeşte integrală primă a sistemului (1°) dacă nu este identic constantă şi $U(\phi(t)) \equiv$constant pentru orice traiectorie $y = \phi(t)$ a sistemului (1°) care rămâne în D_o (constanta depinde de traiectorie).*

Teorema 4.1. *Funcţia U de clasă C' în D_o este integrală primă a sistemului (1°) dacă şi numai dacă este verificată egalitatea:*

$$(\,grad\, U(x), f(x)\,) = 0 \quad \forall \quad x \in D_o$$

Definiţia 4.12. *Vectorul $a \in R^n$ se numeşte punct critic al sistemului (1°) dacă f(a) = 0.*

Definiţia 4.13. *$U_1, U_2, \ldots, U_k$ de clasă C' se numesc independente într-o vecinătate a unui punct $a \in R^n$ dacă matricea iacobiană*

$$\left[\frac{\partial U_i(a)}{\partial xj}\right] \qquad i = 1, \ldots k; \qquad j = 1, \ldots n$$

are rangul k ($k \leq n$).

Teorema 4.2. *Într-o vecinătate a unui punct $a \in R^n$ care nu este critic pentru sistemul (1°), există exact n - 1 integrale prime independente.*

4.2.2. Integrale prime ale sistemelor diferenţiale neautonome

Fie sistemul diferenţial autonom

(4.8) $$\dot{x} = f(t, x)$$

unde f : $\Omega \subset R^{n+1} \to R^n$ este continuă, diferenţiabilă în raport cu x $\in R^n$ şi având derivata f_x' continuă pe mulţimea deschisă Ω.

Definiţia 4.14. *Funcţia T(t, x) : $\Omega \to R$ este o integrală primă a sistemului (4.8) pe o submulţime $\Omega_0 \subset \Omega$, dacă T este de clasă C' pe Ω_o, nu este identic constantă şi $T(t, \phi\ (t)) \equiv$ constant, pentru orice traiectorie $y = \phi\ (t)$ a sistemului (4.8) cu graficul în Ω_o.*

Teorema 4.3. Funcţia T de clasă C' este integrală primă a sistemului (1) $\dot{x}$= f(t,x) dacă şi numai dacă are loc egalitatea:

$$(4.9.)\quad \frac{\partial T}{\partial t}(t,x)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial x_i}(t,x)f_i(t,x)=0\,;\forall\,(t,x)\in\Omega_o$$

Observaţie:

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t}=\frac{\partial T}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial x_i}\cdot f_i$$

unde $\frac{\partial x_i}{\partial t}$ este $\dot{x}_i=f_i(t,x_1,...x_n)$

Teorema 4.4. *În vecinătatea unui punct $(t_o,a)\in\Omega$ sistemul (4.8) $\dot{x}$=f(t,x) admite exact n integrale prime independente T_1 ,…T_n. Oricare altă integrală primă T(t,x) se reprezintă sub forma*

(4.10.) $\quad T(t,x) = F(T_1(t,x),…,T_n(t,x))$

unde F este o funcţie diferenţiabilă într-o vecinătate a punctului $(V_1(t_o, a),…,V_n(t_o, a))$.

Observaţie:

Cunoaşterea a k integrale prime independente (k < n) permite reducerea ordinului (numărului de funcţii necunoscute ale sistemului (4.8) $\dot{x}$= f (t,x)) cu k unităţi.

În particular, cunoaşterea a n integrale prime independente echivalează cu rezolvarea sistemului.

Capitolul V

5.1. Noţiuni generale de stabilitate

Considerăm sistemul diferenţial

$$\dot{x} = f(t, x) \qquad (5.1)$$

unde f : $\Omega \to R^n$ este o funcţie verificând următoarele condiţii:

i) f este continuă în (t, x)

ii) f este local lipschtziană în x pe mulţimea

$$\Omega = \{(t, x) \in R^+ \text{ x } R^n ; \|x\| \prec a\}$$

Din teoremele de existenţă, unicitate şi prelungibilitate rezultă că, pentru orice punct $(t_o,x_o) \in \Omega$, sistemul (5.1) cu condiţia iniţială $x(t_o) = x_o$ admite o soluţie unică $x = x(t,t_o,x_o)$, definită pe un interval maximal $[t_o ,T)$.

Fie $x = \phi(t)$ o soluţie a sistemului (5.1) definită pe semiaxa $[t_o ,+\infty]$.

Definiţia 5.1. *Soluţia ϕ se numeşte stabilă dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon, t_o) > 0$, astfel încât $x(t,t_o,x_o)$ este definită pe $[t_o ,+\infty]$ şi are loc inegalitatea*

$$\|x(t,t_o,x_o) - \varphi(t)\| \le \varepsilon \quad \forall t \in [t_o ,+\infty] \qquad (5.2)$$

pentru toate punctele $\|x_o\| < a$ *verificând condiţia*

$$\|x_o - \varphi(t_o)\| \le \delta(\varepsilon, t_o)$$

Definiţia 5.2. *Soluţia ϕ se numeşte asimptotic stabilă dacă este stabilă şi dacă există $\mu(t_o) > 0$, astfel încât*

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t,t_{o,}x_o) - \varphi(t)\| = 0 \qquad (5.3)$$

de îndată ce $\|x_o - \varphi(t_o)\| \le \mu(t_o)$

Definiţia 5.3. *Soluţia* ϕ *se numeşte uniform stabilă dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$*, există* $\delta(\varepsilon)$ *(se poate alege independent de* t_o*), astfel încât* $x(t,t_o,x_o)$ *este definită pe* $[t_o ,+\infty]$ *şi are loc inegalitatea* $\|x(t,t_o,x_o)-\varphi(t)\| \le \varepsilon$*,* $\forall t \in [t_o,+\infty)$ *pentru toate punctele* $\|x_o\| \prec a$ *verificând condiţia* $\|x_o-\varphi(t_o)\| \le \delta(\varepsilon)$.

Definiţia 5.4. *Soluţia* ϕ *se numeşte uniform asimptotic stabilă dacă este uniform stabilă şi există* $\mu_0 > 0$*, independent de* t_o *astfel încât* $\|x_o-\varphi(t_o)\| \le \mu_o$ *implică*

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t,t_{o,}x_o)-\varphi(t)\| = 0$$ *uniform în raport cu* t_o.

Observaţie:

Printr-o operaţie simplă făcând substituţia:

$$y = x - \phi \tag{5.4}$$

studiul stabilităţii unei soluţii x=ϕ(t) a sistemului $\dot{x} = f(t,x)$ se poate reduce la studiul stabilităţii soluţiei nule, x=0 (soluţia banală). Pentru aceasta vom presupune, în plus, faţă de condiţia (i), că funcţia f satisface şi condiţia:

$$f(t,o) = 0 \quad \forall t \ge t_0 \tag{5.5}$$

fapt care revine de altfel la a pretinde că x = 0 să fie soluţie pentru sistemul (5.1).

Definiţia 5.1. pentru ϕ = 0 devine:

Definiţia 5.5. *Soluţia banală* (ϕ = 0) *se numeşte stabilă dacă pentru orice* ε>0*, există* $\delta(\varepsilon, t_o)$ >0 *astfel încât* $x(t, t_o, x_o)$ *este definită pe* $[t_o, +\infty)$ *şi are loc inegalitatea* $\|x(t,t_o,x_o)\| \le \varepsilon \quad \forall t \in [t_o ,+\infty)$ *pentru toate punctele* $\|x_o\| \prec a$ *verificând condiţia* $\|x_o\| \le \delta(\varepsilon,t_o)$

Definiţia 5.6. *Soluţia banală (ϕ = 0) a sistemului (1) se numeşte asimptotic stabilă dacă este stabilă şi dacă există* $\mu(t_0) > 0$ *astfel încât* $\lim_{t\to\infty}\|x(t,t_{o,}x_o)\| = 0$ *pentru toţi* x_o *verificând condiţia* $\|x_o\| \le \mu(t_o)$.

Observaţie:
Stabilitatea este o proprietate a soluţiei şi nu a sistemului.

Exemplul 5.1. Se poate întâmpla ca un acelaşi sistem să aibă simultan soluţii stabile şi instabile.

(Δ) $\ddot{x} + \sin x = 0$ t $\ge$ 0 (ecuaţia pendulului)

Ecuaţia (Δ) admite două soluţii staţionare cu valori pe intervalul [o, ∞) şi anume ϕ_1 (t) = 0 şi ϕ_2(t)= π.

Din punct de vedere fizic, ele corespund celor două poziţii de echilibru (stabil şi instabil) ale pendulului.

Se arată că ϕ_1 este soluţia stabilă, iar ϕ_2 instabilă.

Definiţia 5.7. *Dacă orice soluţie a sistemului (5.1)* $\dot{x} = f(t,x)$ *este definită pe* $\overline{R}^+ = [o,\infty)$ *şi converge la zero pentru* $t \to \infty$ *atunci sistemul (5.1) se numeşte global asimptotic stabil.*

5.2. Stabilitatea sistemelor liniare perturbate

Definiţia 5.8. *Fie sistemul diferenţial de forma:*

$$\dot{x} = Ax + F(t,x) \quad ; \quad t \ge 0 \qquad (5.5)$$

unde A este o matrice constantă, iar $F : \overline{R} \text{ x } R^n \to R^n$ *este o funcţie continuă pe cilindrul*

$$\Omega = \{\ (t,x) \in R^+ \text{ x } R^n,\ \|x\| \prec r\ \}$$

local lipschitziană în x şi F(t,0) $\equiv$ *0.*

Un astfel de sistem se numeşte sistem liniar perturbat, iar F se numeşte perturbaţie.

Teorema Liapunov - Poincaré. *Presupunem că A este matrice hurwitziană şi F verifică condiţia*

$$\|F(t,x)\| \leq L\|x\| \qquad \forall (t,x) \in \Omega \tag{5.6}$$

unde constanta L este suficient de mică.
Atunci soluţia banală a sistemului (5.5) este asimptotic stabilă.

Teorema lui Poincaré. *Fie A matrice hurwitziană şi F verifică condiţia*

$$\|F(t,x)\| \leq \alpha\|x\| \qquad \forall (t,x) \in \Omega \tag{5.7}$$

unde $\lim\limits_{r \to 0} \dfrac{\alpha(r)}{r} = 0$

Atunci soluţia banală a sistemului (5.5) este asimptotic stabilă.

Aplicaţie a teoremei lui Poincaré în studiul stabilităţii soluţiilor sistemelor diferenţiale prin metoda numită „a primei aproximaţii”. Considerăm sistemul autonom

$$\frac{dx_i}{dt_i} = F_i(x_1, \ldots x_{2n}) \quad \mathrm{i} = \overline{1,2}\mathrm{n} \tag{5.8}$$

sau sub forma matricială $\dot{x} = f(x)$ (5.9)

Presupunând că f(o) = 0 şi matricea

$$f_x(0) = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{2n}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_{2n}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial F_{2n}}{\partial x_1} & \frac{\partial F_{2n}}{\partial x_2} & \frac{\partial F_{2n}}{\partial x_{2n}} \end{bmatrix} x_1 = x_2 = \ldots = x_{2n} = 0 \tag{5.10}$$

este matrice Hurwitz.

Dacă ipotezele de mai sus sunt îndeplinite atunci soluţia nulă a sistemului autonom (5.9) este asimptotic stabilă.

Deci, conform metodei studiul stabilităţii se reduce la studiul semnului rădăcinilor ecuaţiei caracteristice:

$$\det [A - \lambda I] = 0$$

care are forma:

$$a_o \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + ... + a_{m-1}\lambda + a_m = 0 \quad m = 2n \tag{5.11}$$

Pentru ca mişcarea neperturbată să fie asimptotic stabilă este necesar şi suficient ca toate rădăcinile reale ale ecuaţiei (5.11) să fie negative şi cele imaginare să fie cu partea reală negativă.

5.3. Studiul stabilităţii folosind matricea Hurwitz

Sistemul

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(t, x_1, x_2, ..., x_{2n}) \qquad i = 1,2,...,2n \tag{5.12}$$

poate fi scris sub forma

$$\dot{x} = A(t)x$$

(5.13)

unde A(t) este o matrice pătratică n x n cu elemente continuu pe $[0, +\infty)$.

Să considerăm cazul particular când matricea A(t) devine o matrice A cu elemente constante.

Definiţia 5.9. *O matrice A este o matrice Hurwitz dacă polinomul său caracteristic are toate rădăcinile cu părţi reale negative.*

Pentru sistemul

$$\dot{x} = A \cdot x \tag{5.14}$$

dăm în continuare fără demonstraţie următoarele criterii de stabilitate:

a) (Fie A(t)=A o matrice constantă) Soluţiile sistemului (5.14) sunt asimptotic stabile dacă şi numai dacă matricea A este o matrice Hurwitz. Dacă cel puţin una din rădăcinile polinomului caracteristic al matricei A are partea reală pozitivă, soluţia nulă a sistemului este instabilă.

b) Dacă A este o matrice Hurwitz, atunci sistemul (5.14) (cu coeficienţi constanţi) este global asimptotic exponenţial stabil.

Definiţia 5.10. *Soluţia* $x \equiv 0$ *a sistemului* $\dot{x} = f(x)$ *se numeşte global asimptotic exponenţial stabil dacă există* $\alpha > 0, M \geq 0$, *independenţi de xₒ astfel încât*

$$\left|x(t;t_0,x_0)\right| \leq M_e^{-\alpha t}\left|x_0\right| \tag{5.15}$$

oricare ar fi t ≥ o unde prin | .| se înţelege norma matricei soluţiilor sistemului de ecuaţii diferenţiale.

Definiţia 5.11. *Dată fiind o matrice A de dimensiune n* x *n şi de elemente* $\{a_{ij}\};1 \leq i \leq n;1 \leq j \leq n$, *vom defini norma sa şi o vom nota cu* $||\ A\ ||$ *numărul*

$$\|A\| = \max_i \sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|.$$

5.4. Funcţia Liapunov

Definiţia 5.12. *Funcţia reală V, definită pe*

$$\Omega = \left\{(t,x) \in R^+ \times R^n; \|x\| < a \leq \infty\right\}$$

se numeşte pozitiv definită dacă există o funcţie monoton nedescrescătoare şi continuă $w:\overline{R}^+ \to \overline{R}^+$ *astfel încât w(0)=0; w(r) >0 pentru r ≠ 0 şi V(t,x) ≥ w (*$\|x\|$*)* $\forall(t,x) \in \Omega$.

Definiţia 5.13. *Vom spune că V este negativ definită dacă -V este pozitiv definită.*

Definiţia 5.14. *Funcţia* $V:\Omega \to \overline{R}^+$ *se numeşte funcţie Liapunov asociată sistemului* $\dot{x} = f(t,x)$ *(sistem neautonom) dacă îndeplineşte următoarele condiţii:*

j) V este continuă împreună cu derivatele sale de primul ordin (în t şi x) pe domeniul Ω.

jj) V este pozitiv definite pe Ω *şi V(t,o) = o* $\forall t \geq 0$

jjj) $\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + (grad_x V(t,x), f(t,x)) \leq 0 \qquad \forall (t,x) \in \Omega$

Am notat cu (,) produsul scalar din spaţiul R^n şi prin $grad_x V$, gradientul funcţiei V ca funcţie de x, adică vectorul $(\frac{\partial V}{\partial x_1},...,\frac{\partial V}{\partial x_n})$.

Teorema de stabilitate a lui Liapunov pentru sisteme neautonome. *Se consideră sistemul diferenţial* $\dot{x} = f(t,x)$ *unde* $f:\Omega \to R^n$ *este o funcţie verificând următoarele condiţii:*

i) f este continuă în (t, x)

ii) f este local lipschitziană în x pe mulţimea

$$\Omega = \{(t,x) \in R^+ \text{ x } R^n; \|x\| < a\}$$

Dacă există o funcţie Liapunov V(t,x) pentru acest sistem, atunci soluţia banală este stabilă.

Presupunem în plus că funcţia

$$w(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + (grad_x V(t,x), f(t,x))$$

este negativ definită pe Ω şi are loc inegalitatea

$V(t,x) \leq \mu(\|x\|), \ \forall (t,x) \in \Omega$, unde μ este o funcţie continuă şi pozitivă, care se anulează în origine. Atunci soluţia banală a sistemului $\dot{x} = f(t,x)$ este asimptotic stabilă.

Teorema 5.1. *Dacă* $\Omega = R^+ \text{ x } R^n$ *şi funcţia w din condiţia* $V(t,x) \geq w(\|x\|) \quad \forall (t,x) \in \Omega$ *are proprietatea*

$$\lim_{r\to\infty} w(r) = +\infty$$

$(w:\overline{R}^+ \to \overline{R}^+; w(o) = 0; w(r) > 0$ *pentru r ≠ 0; w monoton* *descrescătoare), atunci în ipotezele teoremei de stabilitate a lui Liapunov pentru sisteme neautonome, soluţia banală a sistemului $\dot{x} = f(t,x)$ este global asimptotic stabilă.*

Definiţia 5.15. Funcţia V: D$\rightarrow$R se numeşte funcţia Liapunov pe D asociată sistemului diferenţial autonom $\dot{x} = f(x)$ dacă îndeplineşte următoarele condiţii:

e) V$\in$C'(D) şi V(o)=0

ee) V(x) >0; $\forall x \neq 0$

eee) (grad V(x), f(x))$\leq$0, $\forall$x$\in$D

Mai precizăm că: $D = \{x \in R^n, \|x\| \prec a \leq +\infty \}$;

$f : D \rightarrow R^n$; f local lipschitziană;

(,) este produsul scalar din R^n.

grad_x V este vectorul $\left(\frac{\partial V}{\partial x_1},...,\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)$

Teorema de stabilitate a lui Liapunov pentru sisteme autonome. *Dacă există o funcţie Liapunov asociată sistemului diferenţial autonom $\dot{x} = f(x)$ atunci soluţia banală a sistemului $\dot{x} = f(x)$ este stabilă.*

Dacă în plus este verificată condiţia

(grad V(x), f(x)) <0 $\forall x \neq 0$

atunci soluţia nulă este asimptotic stabilă.

Dacă $\lim\limits_{\|x\|\rightarrow\infty} V(x) = +\infty$ atunci soluţia banală este global asimptotic stabilă.

5.5. Stabilitatea în primă aproximaţie

Definiţia 5.16. *Fie U$\subseteq$R o mulţime deschisă (sau un interval arbitrar) şi f_1:U$\rightarrow$R o funcţie indefinit derivabilă într-un punct a$\in$U. Seria:*

$$f_1(a)+\frac{x-a}{1!}\cdot f_1'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f_1''(a)+...+\frac{(x-a)^n}{n!}f_1^{(n)}(a)+...$$

se numeşte seria Taylor cu centrul în a asociată funcţiei f_1 . Vom spune că f_1 este dezvoltabilă în seria Taylor cu centrul în a, dacă $(\exists)r=r_a>0$, astfel încât seria $\sum_{n\geq 0}\frac{(x-a)^n}{n!}\cdot f_1^{(n)}(a)$ este convergentă şi are suma egală cu $f_1(x)$, $(\forall)x\in U$; $|x - a| < r$.

Teorema 5.2. *Fie $f_2:D_1\subset R^2\to R$; $(x_o,y_o)=P_o\in D_1$.*

Presupunem că f_2 admite derivate parţiale până la ordinul $n+1$ inclusiv continue într-o vecinătate V_{P_0}. În aceste condiţii are loc următoarea formulă:

$$f_2(x,y)=f_2(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f_2(x_0,y_0)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f_2(x_0,y_0)+...+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f_2(x_0,y_0)+\hat{\imath}n$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f_2(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$$

care am notat $h = x - x_0$, $k=y-y_0$, $0<\theta<1$.

Fie sistemul diferenţial autonom

$$\dot{x}=f(x), \tag{5.16}$$

$x = (x_1,\ldots,x_n)$ unde $f:D\to R^n$ este o funcţie de clasă $C^\infty[0=(0,...0)\in D]$ pe o mulţime deschisă D a spaţiului R^n .

Prin dezvoltarea Taylor a funcţiilor f_i în jurul punctului $0 = (0,\ldots,0)$ cu proprietatea că $f_i(0)$ se obţine:

$$\dot{x}_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot x_j+\phi_i(x_1,...,x_n) \tag{5.17}$$

Sistemul primei aproximaţii este sistemul liniar, de forma

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \tag{5.18}$$

a cărui stabilitate se analizează uşor.

Legătura dintre stabilitatea soluţiilor modelului (5.18) numită "stabilitate în primă aproximaţie" şi stabilitatea modelului neliniar (5.17) este dată de teoremele care urmează.

Teorema 5.3. *Stabilitatea asimptotică a sistemului primei aproximaţii implică stabilitatea asimptotică a modelului neliniar de la care a provenit.*

Teorema 5.4. *Instabilitatea sistemului primei aproximaţii implică instabilitatea sistemului neliniar de la care a provenit.*

Observaţie:
Dacă sistemul primei aproximaţii are o stabilitate marginală, nu se poate afirma nimic despre stabilitatea sau instabilitatea sistemului neliniar.

Definiţia 5.17. *Dacă polinomul caracteristic are, pe lângă rădăcini situate în semiplanul complex stâng şi rădăcini situate pe axa imaginară sistemul se numeşte marginal stabil (semistabil).*

5.6. Contribuţii la studiul stabilităţii unor sisteme dinamice folosind integrale prime

Teoria stabilităţii are ca punct de plecare teza de doctorat a matematicianului rus A.M. Liapunov elaborată în anul 1882 şi intitulată „Problema generală a stabilităţii mişcării”. Aşa se explică vasta bibliografie care poate fi consultată în prezent. În acest subcapitol dorim să arătăm cum pot fi construite funcţii Liapunov.

Nu există până acum o metodă generală de construcţie a acestor funcţii Liapunov. Vom arăta în continuare cum pot fi construite funcţii Liapunov folosind două metode.

Prin $\dot{x}$ vom nota derivata lui x(t) în funcţie de t.

5.6.1. Studiul stabilităţii unor sisteme dinamice folosind prima metodă de determinare a funcţiei Liapunov

Această metodă se foloseşte la studiul sistemelor neliniare când metoda primei aproximaţii nu răspunde problemei puse. Metoda constă în a efectua următorii paşi:

a) se liniarizează sistemul

b) se găseşte o integrală primă pentru sistemul liniarizat. Fie aceasta $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=C$

c) se ia ca funcţie Liapunov pentru sistemul liniarizat
$V(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n) - F(0, \ldots, 0)$

d) se verifică dacă $V(x_1, \ldots x_n)$ este funcţie Liapunov şi pentru sistemul neliniar

e) se aplică teorema de stabilitate a lui Liapunov pentru sisteme autonome

Exemplul 5.2. Să se studieze stabilitatea sistemului:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_2 + x_2x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 \end{cases} \qquad (5.19)$$

Studiem stabilitatea sistemului (5.19) folosind metoda primei aproximaţii.

Calculăm matricea A conform formulei (5.10).

$$A=\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \qquad x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

$F_1 = -4x_2 + x_2\, x_3$
$F_2 = x_1 - x_1\, x_3$
$F_3 = x_1\, x_2$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = 0 \;\; ; \;\; \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = -4 + x_3 \;\; ; \;\; \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = x_2$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = 1 - x_3 \;\; ; \;\; \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = 0 \;\; ; \;\; \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = -x_1$$
$$\frac{\partial F_3}{\partial x_1} = x_2 \;\; ; \;\; \frac{\partial F_3}{\partial x_2} = x_1 \;\; ; \;\; \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{-4 + x_3} & \mathbf{x_2} \\ 1 - x_3 & \mathbf{0} & \mathbf{-x_1} \\ \mathbf{x_2} & \mathbf{x_1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

în punctul

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rezolvăm ecuaţia det $[A - \lambda I] = 0$

$$[A-\lambda I]=\begin{bmatrix}0 & -4 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\lambda & -4 & 0\\ 1 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda\end{bmatrix}$$

$$\det\ [\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}]=\begin{vmatrix}-\lambda & \mathbf{-4} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-}\lambda & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-}\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+0+0-0-0-4\lambda=$$

$$=-\lambda^3-4\lambda=-\lambda(\lambda^2+4)\ ;$$

$$\mathbf{det}\,[\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}]=0 \ \Rightarrow$$

$$-\lambda(\lambda^2+4)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}\lambda_1&=0\\ \lambda_2&=-2i\\ \lambda_3&=2i\end{aligned}$$

Deoarece ecuaţia det [A-λI] = 0 admite rădăcini cu partea reală nulă nu putem spune nimic despre stabilitatea sistemului (5.19).

Calculăm o integrală primă pentru sistemul primei aproximaţii $\dot{x}=Ax$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-4x_2\\ \dot{x}_2=x_1\\ \dot{x}_3=0\end{cases} \tag{5.20}$$

Înmulţim prima ecuaţie a sistemului (5.20) cu x_1, pe a doua cu $4x_2$ şi pe a treia cu Bx_3 şi le adunăm membru cu membru.

Obţinem:

$$x_1\dot{x}_1+4x_2\dot{x}_2+Bx_3\dot{x}=-4x_1x_2+4x_1x_2+0\cdot Bx_3=0 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{x_1^2}{2}+2x_2^2+\frac{Bx_3^2}{2}=C$$

Notăm: $G(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{2} + 2x_2^2 + \frac{Bx_3^2}{2}$

$G(x_1, x_2, x_3)$ este o integrală primă pentru sistemul (5.20). Verificăm condiţia ca o funcţie să fie integrală primă pentru un sistem diferenţial autonom, adică

(grad $G(x_1, x_2, x_3)$, $f(x_1, x_2, x_3)$) = 0

$$\text{grad } G(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}, \frac{\partial G}{\partial x_2}, \frac{\partial G}{\partial x_3} \right) = (x_1, 4x_2, Bx_3)$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-4x_2, x_1, 0)$$

$$(\text{grad } G(x_1, x_2, x_3),\ f(x_1, x_2, x_3)) = -4x_1x_2 + 4x_1x_2 + 0 = 0$$

Deci $G(x_1, x_2, x_3)$ este integrală primă pentru sistemul (5.20).

Căutăm funcţia Liapunov pentru sistemul (5.20) de forma:

$$V_2(x_1, x_2, x_3) = G(x_x, x_2, x_3) - G(0,0,0) = \frac{x_1^2}{2} + 2x_2^2 + \frac{Bx_3^2}{2}$$

Verificăm condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească o funcţie Liapunov pentru un sistem diferenţial autonom.

e) $V_2 \in C^1(D)$ fiind o funcţie elementară (polinomială);
$V_2(o) = 0$.

ee) $V_2(x) > 0$, $\forall x \neq 0$ fiind o sumă de pătrate (consider $B>0$)

eee) (grad $V_2(x)$, $f(x)$) $\leq$ am verificat pentru G care este egal cu V_2.

Luăm funcţia Liapunov pentru sistemul (5.19) de forma

$$V_1(x_1, x_2, x_3) = V_2(x_1, x_2, x_3).$$

Verificăm dacă V_1 este funcţie Liapunov pentru sistemul diferenţial autonom (5.19).

e) $V_1 \in C^1(D)$ fiind o funcţie elementară $V_1(o) = 0$.

ee) $V_1(x) > 0$ $\forall x \neq 0$ fiind o sumă de pătrate (consider $B>0$).

eee) (grad $V_1(x)$, $F(x)$) $\leq 0 \forall x \in \Delta$

grad $V_1(x) = (x_1, 4x_2, Bx_3)$.

$$F(x) = (-4x_2 + x_2x_3,\ x_1 - x_1x_3,\ x_1\,x_2).$$

$(\mathrm{grad}V_1(x),F(x))=x_1(-4x_2+x_2x_3)+4x_2(x_1-x_1x_3)+Bx_3(x_1x_2)= =$
$-4x_1\,x_2 + x_1\,x_2\,x_3 + 4x_1\,x_2 - 4x_1\,x_2\,x_3 + Bx_1x_2\,x_3 =$
$= x_1x_2x_3\,(1-4+B) = (-3+B)\,x_1x_2x_3$

Dacă $B=3 \Rightarrow (\mathrm{grad}\ V_1(x), F(x)) = 0$

Conform teoremei lui Liapunov pentru sisteme autonome $\Rightarrow$ soluţia banală a sistemului (5.19) este stabilă.

Exemplul 5.3. Să se studieze stabilitatea sistemului:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^3 + xy^2 \\ \dot{y} = +x + y^3 + x^2 y \end{cases} \tag{5.21}$$

Studiem stabilitatea sistemului (5.21) folosind metoda primei aproximaţii.

Calculăm matricea A conform formulei (5.10)

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$ pentru

$$x = y = 0$$

$$F_1 = -y + x^3 + xy^2$$

$$F_2 = +x + y^3 + x^2 y$$

$$A = \begin{bmatrix} 3x^2 + y^2 & -1 + 2xy \\ +1 + 2xy & \mathbf{3y^2} + x^2 \end{bmatrix}$$ pentru

$$x = y = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 3x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -1 + 2xy$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = +1 + 2xy$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = 3y^2 + x^2$$

Rezolvăm ecuaţia det $[A - \lambda I] = 0$

$$\Rightarrow \det [A - \lambda I] = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$\det [A - \lambda I] = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm\ i$

Deoarece ecuaţia det $[A - \lambda I] = 0$ admite rădăcini cu partea reală nulă, nu putem spune nimic despre stabilitatea sistemului (5.21).

Calculăm o integrală primă pentru sistemul primei aproximaţii $\dot{x} = Ax$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases} \tag{5.22}$$

Înmulţim prima ecuaţie a sistemului (5.22) cu x şi pe cea de-a doua cu y şi adunăm membru cu membru. Avem $x\dot{x} + y\dot{y} = -xy + xy = 0$

Deci $x\dot{x} + y\dot{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$

Notăm $H(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$;

Verificăm dacă H(x,y) este integrală primă pentru sistemul autonom (5.22).

(grad H(x,y),g(x,y)) = 0

grad H(x,y) = $\left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y} \right) = (x, y)$

g(x,y) = (-y, x)

(grad H(x,y), g(x,y)) = x(-y) + y x = 0

Deci $H(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$ este integrală primă pentru sistemul (5.22).

Căutăm funcţia Liapunov pentru sistemul (5.22) de forma

$$V_4(x,y)=H(x,y)-H(0,0)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$$

Verificăm condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească funcţia Liapunov pentru un sistem autonom.

e) $V_4 \in C^1$ (D) fiind o funcţie elementară; V_4 (o) = 0.

ee) V_4 (x) > 0 $\forall x \neq 0$ fiind o sumă de pătrate

eee) (grad V_4(x), g(x,y)) ≤ 0 am verificat pentru H care este egal cu V_4.

Luăm funcţia Liapunov pentru sistemul (5.21) de forma

$$V_3(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$$

Verificăm că V_3 este funcţie Liapunov pentru sistemul diferenţial autonom (5.21).

e) $V_3 \in C^1$(D) fiind o funcţie elementară V_3 (o) = 0.

ee) V_3(x)>0 $\forall x \neq 0$ fiind o sumă de pătrate .

eee) (grad V_3(x), F(x)) $\leq 0 \forall x \in D \leq 0$

grad V_3 (x) = (x,y)

F(x) = ($-y + x^3 + xy^2$, $x + y^3 + x^2y$)

(grad V_3 (x), F(x)) = $+x(-y + x^3 + xy^2)+y(x + y^3 + x^2 y)$ =
$=-xy + x^4 + x^2 y^2 + xy + y^4 + +x^2 y^2 = x^4 + y^4 + 2x^2 y^2 =$
$=(x^2 + y^2)^2 > 0$.

Deci cea de-a treia condiţie nu este îndeplinită şi nu putem spune nimic despre stabilitate. Aplicăm teorema privind instabilitatea sistemelor diferenţiale autonome pe care o enunţăm mai jos.

$$\frac{dV_3}{dt}=\frac{\partial V_3}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial V_3}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial V_3}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial V_3}{\partial y}\cdot\dot{y}=$$

$$=x\cdot\dot{x}+y\cdot\dot{y}=x(-y+x^3+xy^2)+y(x+y^3+x^2y)=$$

$$=-xy+x^4+x^2y^2+xy+y^4+x^2y^2=$$

$$=x^4+2x^2y^2+y^4=(x^2+y^2)^2$$

$$\frac{dV_3}{dt}=(x^2+y^2)^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{dV_3}}{\mathrm{dt}}>0\ \forall\ (\mathrm{x},\mathrm{y})\in\mathrm{D}.$$

$$\frac{dV_3}{dt}(x,y)\geq 0\ ;\quad \mathbf{V_3}(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\geq 0\ \forall\ (\mathrm{x},\mathrm{y})\in\mathrm{D}$$

Deci soluţia sistemului (5.21) este instabilă.

Teoremă privind instabilitatea sistemelor diferenţiale autonome. *Dacă pentru sistemul de ecuaţii* $\frac{d\xi i}{dt}=F_i(\xi_1,...\xi_{2n})$ $\quad \mathrm{i}=\overline{1,2n}$ *se poate găsi o funcţie V_e astfel încât* $\frac{dV_e}{dt}$ *să fie de semn determinat, iar V_e să poată avea şi valori de acelaşi semn cu* $\frac{dV_e}{dt}$ *atunci mişcarea neperturbată este nestabilă.*

Definiţia 5.18. *Dacă $V_e = V_e\ (\xi_1,\ \xi_2,\ ...\ \xi_{2n})$, această funcţie se numeşte de semn determinat într-un domeniu din spaţiu 2n, dacă are valori de acelaşi semn şi nu se anulează decât în origine.*

$$\frac{dV_e}{dt}=\frac{\partial V_e}{\partial\xi_1}\cdot\frac{\partial\xi_1}{\partial t}+\frac{\partial V_e}{\partial\xi_2}\cdot\frac{\partial\xi_2}{\partial t}+...+\frac{\partial V_e}{\partial\xi_{2n}}\cdot\frac{\partial\xi_{2n}}{\partial t}=\frac{\partial V_e}{\partial\xi_1}\cdot F_1+\frac{\partial V_e}{\partial\xi_2}\cdot F_2+...+\frac{\partial V_e}{\partial\xi_{2n}}\cdot F_{2n}$$

5.6.2. Studiul stabilităţii unor sisteme dinamice folosind a doua metodă de determinare a funcţiei Liapunov

Această metodă se foloseşte în cazul în care putem afla o integrală primă a sistemului dinamic. Fie aceasta $F(x_1, \ldots, x_n) = C$. Luăm ca funcţie Liapunov pentru sistemul dinamic funcţia

$V(x_1, \ldots, x_n)=[F(x_1, \ldots, x_n)]^2$ sau

$V(x_1, \ldots, x_n) = [F(x_1, \ldots, x_n) - F(0, \ldots 0)]^2$ după cum ne convine în exemplul pe care vrem să-l studiem.

Verificăm dacă $V(x_1, \ldots, x_n)$ îndeplineşte condiţiile din definiţia funcţiei Liapunov pentru sisteme autonome şi apoi aplicăm teorema de stabilitate a lui Liapunov pentru sisteme autonome.

Exemplul 5.4. Să se studieze stabilitatea sistemului:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - b\dot{x}_1 + kx_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 + kx_2 = 0 \end{cases} \tag{5.23}$$

Făcând substituţiile $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = \dot{x}_1$, $y_4 = \dot{x}_2$ obţinem:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_3 \\ \dot{y}_2 = y_4 \\ \dot{y}_3 = by_3 - ky_1 \\ \dot{y}_4 = -by_4 - ky_2 \end{cases} \tag{5.24}$$

Înmulţind prima ecuaţie a lui (5.23) cu $\dot{x}_2$ şi pe cea de a doua cu $\dot{x}_1$ şi adunându-le obţinem:

$$\ddot{x}_1\dot{x}_2 - b\dot{x}_1\dot{x}_2 + kx_1\dot{x}_2 + \ddot{x}_2\dot{x}_1 + b\dot{x}_2\dot{x}_1 + kx_2\dot{x}_1 = 0$$

$$(\ddot{x}_1\dot{x}_2 + \ddot{x}_2\dot{x}_1) + (x_1\dot{x}_2 + x_2\dot{x}_1) = 0 \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\dot{x}_1\dot{x}_2 + kx_1x_2\right] = 0 \Rightarrow$$

$\frac{d}{dt}\left[y_3y_4 + ky_1y_2\right] = 0$ deci $y_3y_4 + ky_1y_2 =$ C este integrală primă pentru (5.24). Luăm ca funcţie Liapunov $V(y_1,y_2,y_3,y_4) = (y_3 y_4 + k y_1 y_2)^2$. Ea verifică condiţiile din definiţia funcţiei Liapunov (pentru sisteme autonome). Aplicând teorema de stabilitate a lui Liapunov pentru sisteme autonome rezultă că sistemul (5.23) este stabil.

Exemplul 5.5. Să se studieze stabilitatea sistemului:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + w^2 x_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 + w\dot{x}_1 = 0 \end{cases} \tag{5.25}$$

Făcând substituţiile $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = \dot{x}_1$, $y_4 = \dot{x}_2$ obţinem

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_3 \\ \dot{y}_2 = y_4 \\ \dot{y}_3 = -cy_3 - w^2 y_1 \\ \dot{y}_4 = -wy_3 \end{cases} \tag{5.26}$$

Din [4] pagina 119 luăm integrala primă

$F(y_1,y_2,y_3,y_4) = y_4 + wy_1 = C$

Pentru sistemul (5.26) luăm $V(y_1,y_2,y_3,y_4) = (y_4 + wy_1)^2$ care verifică condiţiile din definiţia funcţiei Liapunov pentru sisteme autonome. Folosind teorema de stabilitate a lui Liapunov pentru sisteme autonome rezultă că sistemul este stabil.

Exemplul 5.6. Să se studieze stabilitatea sistemului:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0 \\ m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \tag{5.27}$$

Adunând membru cu membru ecuaţiile sistemului (5.27) obţinem:

$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + c(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) = 0 \quad \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\left[m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + c(x_1 + x_2)\right] = 0 \Rightarrow \quad m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + c(x_1 + x_2) = C$$

este o integrală primă. Facem substituţiile

$y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = \dot{x}_1$, $y_4 = \dot{x}_2$.

Sistemul (5.27) devine:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_3 \\ \dot{y}_2 = y_4 \\ \dot{y}_3 = -\dfrac{c}{m} y_3 - \dfrac{k}{m}(y_1 - y_2) \\ \dot{y}_4 = -\dfrac{c}{m} y_4 - \dfrac{k}{m}(y_2 - y_1) \end{cases} \tag{5.28}$$

$V(y_1,y_2,y_3,y_4) = [m(y_3 + y_4) + c(y_1 + y_2)]^2$ este funcţie Liapunov pentru sistemul (5.28) deci verifică condiţiile e – eee din definiţia funcţiei Liapunov pentru sisteme autonome.

Aplicând teorema de stabilitate a lui Liapunov pentru sisteme autonome rezultă că sistemul (5.27) este stabil.

Pentru a găsi cele două metode ne-am bazat pe imaginaţie dar orice pas poate fi argumentat riguros matematic. Aplicarea celor două metode necesită stăpânirea multor cunoştinţe în domeniul stabilităţii, artificii de calcul, imaginaţie şi este rodul studierii stabilităţii pe multe exemple concrete.

5.7. Studiul stabilităţii unor sisteme dinamice cu aplicaţii în economie

În aceast subcapitol sunt analizate patru modele dinamice ale unor procese economice. Procesele economice sunt descrise cu ajutorul sistemelor de ecuaţii diferenţiale şi am considerat că această descriere este corectă întrucât ea apare fecvent în literatura de specialitate iar modelele au nume cunoscute. Studiul stabilităţii unor sisteme de ecuaţii diferenţiale constituie o preocupare a autorului în ultimii cinsprezece ani. De fapt elementele de originalitate constau în două metode de construire a funcţiei Liapunov. Calculăm lagrangianul L, hamiltonianul H şi densitatea de energie f deoarece aceste funcţii pot fi folosite pentru construirea funcţiei Liapunov.

Nu există o metodă generală de determinare a funcţiei Liapunov şi din acest motiv putem spune că subcapitolul are şi elemente de originalitate. Dacă găsim o funcţie care îndeplineşte anumite condiţii, care în literatura de specialitate se numeşte funcţie Liapunov şi care de regulă se notează cu V, aplicăm teoremele de stabilitate pentru sisteme diferenţiale autonome. Ca funcţie Liapunov se poate lua uneori densitatea de energie şi hamiltonianul. De asemenea ca funcţie Liapunov se poate lua o integrală primă sau pătratul acesteia. Există diverse metode de găsire a integralelor prime, una din ele fiind aceea în care folosim lagrangianul sistemului.

Exemplul 5.7. Modelul de dinamică urbană de tip Lorenz este descris de sistemul de ecuaţii diferenţiale (5.29).

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}{}_1 = a_1(a_2x_2 - a_3x_1) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = c_1(c_2x_1 - c_3x_2) - c_4x_1x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = d_1x_1x_2 - d_2x_3 \end{cases} \tag{5.29}$$

Mărimile economice ce apar sunt: x_1-producţia sistemului urban, x_2-numărul de rezidenţi, x_3-pământul închiriat şi a_i, c_i, d_i sunt parametri pozitivi.

$$\lambda^3 + \lambda^2(-c_1c_3 - a_1a_3 + d_2) +$$
$$\lambda(-a_1a_3d_2 - c_1c_3d_2 - a_1a_3c_1c_3 + c_1c_2a_1a_2)$$
$$- a_1a_3c_1c_3d_2 = 0 \qquad (5.29')$$

Pentru ca sistemul să fie stabil trebuie ca partea reală a rădăcinilor ecuaţiei caracteristice să fie negativă.

Exemplul 5.8. Modelul Kaldor-Kalecki descrie variaţia venitului naţional şi a stocului de capital cu ajutorul funcţiei de investiţie I şi a funcţiei de economisire "Istoria" venitului pe perioada $[-\tau, 0]$ este descrisă de argumentul de întârziere τ şi funcţia $\widetilde{\varphi}$. Admitem ipoteza lui Keynes conform căreia funcţia de economisire S este proporţională cu venitul Y adică $S(Z,K) = pY$. De asemenea funcţia de investiţie se presupune liniară în diferenţa dintre nivelul normal al stocului de capital $\frac{p}{q}u$ şi capitalul K şi funcţie neliniară de diferenţa dintre venitul curent Y şi nivelul normal al venitului.

Modelul Kaldor-Kalecki cu argument întârziat este descris de sistemul diferenţial:

$$\begin{cases} \dfrac{dY(t)}{dt} = -spY(t) - rsK(t) + sf(Y(t) - u) + spu(1 + \dfrac{r}{q}) \\ \dfrac{dK(t)}{dt} = -(r + qK(t) + f(Y(t-\tau) - u) + pu(1 + \dfrac{r}{q}) \end{cases} \qquad (5.30)$$

şi condiţiile iniţiale:

$$Y(\theta) = \widetilde{\varphi}(\theta); \theta \in [-\tau, 0]; K(0) = K_0, K_0 \in R_+$$

Mărimile economice ce apar în sistemul diferenţial (5.30) sunt:

Y(t) - venitul (naţional);
K(t) - stocul de capital;
τ - argumentul de întârziere;
s - parametrul de ajustare care măsoară reacţia sistemului faţă de diferenţa dintre investiţie şi economisire;
p - coeficientul marginal al economisirii în raport cu venitul;
u - nivelul normal al venitului;
q - coeficientul de depreciere al capitalului.

Aceste mărimi trebuie să îndeplinească condiţiile:

$$\tau \geq 0, s > 0, p \in (0,1), q \in (0,1) \tag{5.31}$$

De asemenea $f : R \to R$ este o funcţie derivabilă cu proprietăţile:

$$f(0) = 0, f'(0) \neq 0, f'''(0) \neq 0$$

iar r este un coeficient strict pozitiv. Variabilele de stare ale modelului sunt Y(t) şi K(t) şi sunt presupuse funcţii derivabile şi pozitive.

Pentru studiul sistemului (5.30) se utilizează etapele de analiză ale sistemelor de ecuaţii diferenţiale cu argument întârziat şi anume:

1) analiza părţii liniare a sistemului;
2) analiza rădăcinilor ecuaţiei caracteristice şi studiul bifurcaţiei Hopf,
3) studiul subspaţiilor proprii generalizate asociate sistemului în punctul de bifurcaţie Hopf,

4) studiul varietăţii centrale în punctul de bifurcaţie şi a ciclului limită;
5) studiul orbitelor sistemului folosind programe realizate cu softul Maple 9.

Sisteme de ecuaţii diferenţiale cu argument întârziat analizate conform etapelor precizate şi cu ajutorul softului Maple 9 se găsesc în [23]. Caracterizarea bifurcaţiei Hopf şi deci şi a stabilităţii pentru modelul Kaldor-Kalecki se face folosind teoria formelor normale. Efectuând translaţia $Y = y + u, K = k + \frac{p}{q}u$ şi luând pentru parametrii ce apar valorile p=0,3; r=1; q=0,2; s=0,8; u=3; k=4,5 în [24] pentru cinci funcţii de investiţii date concret şi pentru anumite valori ale parametrilor ce apar la formele normale sunt prezentate graficele venitului, capitalului şi investiţiei în raport cu timpul.

Exemplul 5.9. Fie K_t capitalul la momentul t şi L_t volumul forţei de muncă (număr de persoane angajate). În acest caz firma are cifra de afaceri y_t dată de funcţia de producţie $y_t = F(K_t, L_t)$. Evoluţia capitalului este funcţie de politica de dezvoltare a firmei prin cota parte de venituri destinată pentru investiţii, (1-δ_t)π_t, unde π_t este profitul net realizat ţn anul t. Profitul poate fi alocat în întregime dezvoltării sau numai parţial şi anume partea rămasă după acoperirea dividentelor către acţionarii firmei, într-o cotă δ_i. Deducem că $\delta_t\pi_t$ este masa dividentelor şi $1-\delta_t)\pi_t$ este volumul rămas pentru investiţii. Ţinând cont de deprecierea capitalului cu coeficientul μ şi de veniturile obţinute din lichidarea activelor amortizate la costul de revenire λ_t se obţine modelul matematic al dezvoltării unei firme. Ecuaţia de bază a evoluţiei capitalului este:

$$\frac{dK(t)}{dt} = (1-\delta_t)\pi_t - \mu_t(1-\lambda_t)K_t \tag{5.32}$$

Fie γ_t ritmul de creştere al capitalului exprimat în procente. Deoarece $\pi_t = \gamma_t y_t$ rezultă:

$$\frac{dK(t)}{dt} = \gamma_t(1-\delta_t)F(K_t, L_t) - \mu_t(1-\lambda_t)K_t \tag{5.33}$$

Presupunem că variaţia forţei de muncă este:

$$\frac{dL(t)}{dt} = \alpha_1 K + \alpha_2 l - \alpha_0 \tag{5.34}$$

iar firma este caracterizată de o funcţie de producţie de forma Cobb-Douglas

$$y_t = AK^{\alpha}L^{\beta} \tag{5.35}$$

Considerăm situaţia particulară $\alpha = 2, \beta = 1$. Notând corespunzător, particularizând anumite constante şi cu schimbarea de variabilă $K = x_1, L = x_2$ modelul de evoluţie a capitalului unei firme este descris de sistemul de ecuaţii diferenţiale (5.36).

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = cx_1{}^2 x_2 + bx_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + ax_2 - 1 \end{cases} \tag{5.36}$$

$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t)$

Mărimile economice ce apar sunt:
x_1-capitalul firmei şi x_2-volumul forţei de muncă.

Rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} cx_1^{\,2}x_2 + bx_1 = 0 \\ x_1 + ax_2 - 1 = 0 \end{cases} \tag{5.37}$$

obţinem mulţimea punctelor de echilibru pe care o notăm cu Ω. Aşadar Ω este mulţimea soluţiilor sistemului (5.37). Studiem stabilitatea sistemului (5.36) pe $R^2 - \Omega$.

Construim prelungirea Lagrange după metoda prof. dr. Constantin Udrişte. Pentru aceasta introducem câmpul vectorial care are două componente

$$\begin{cases} X_1(x_1, x_2) = cx_1^{\,2}x_2 + bx_1 \\ X_2(x_1, x_2) = x_1 + ax_2 - 1 \end{cases} \tag{5.38}$$

unde

$X = (X_1, X_2)$ şi $x = (x_1, x_2)$

Sistemul (5.38) este un sistem autonom de forma

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2) \;\; i = \overline{1,2}\,. \tag{5.39}$$

Funcţia f dată de

$$f = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} X_i^{\,2} \tag{5.40}$$

reprezintă densitatea de energie asociată câmpului vectorial şi structurii euclidiene δ_{ij}. Dinamica geometrică asociată sistemului este descrisă prin sistemul diferenţial de ordinul al doilea

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_j\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}-\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right)\frac{dx_j}{dt}\text{, i, j}=\overline{1,6}\text{,}\qquad(5.41)$$

care se dovedeşte a fi o prelungire Euler-Lagrange. Cu alte cuvinte lagrangianul

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{dx_i}{dt}-X_i\right)^2\qquad(5.42)$$

sau

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2-\sum_{i=1}^{6}X_i\frac{dx_i}{dt}+f\qquad(5.42')$$

determină acest sistem de ordinul al doilea cu 2 grade de libertate, ale cărui traiectorii conţin şi soluţiile sistemului (5.38). Acest sistem descrie o mişcare geodezică într-un câmp giroscopic de forţe. Pentru precizare, termenul $\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}-\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right)\frac{dx_j}{dt}$ este forţa giroscopică, iar termenul $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ reprezintă o forţă conservativă. Pentru a pune în evidenţă că traiectoriile sunt geodezice construim Hamiltonianul asociat

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2-f\text{,}\qquad(5.43)$$

şi structura geometrică formată din metrica Riemanniană

$$g_{ij}=(H+f)\delta_{ij}\text{,}\qquad(5.44)$$

şi din conexiunea neliniară

$$N_j^i = \Gamma_{jk}^i - F_j^i \ , \tag{5.45}$$

unde Γ_{jk}^i este conexiunea Riemanniană indusă de metrica g_{ij} .

Matricea antisimetrică de elemente F_{ij}

$$F_j^i = \delta^{ih} F_{jh} , \tag{5.46}$$

$$F_{ij} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial X_j} , \tag{5.47}$$

Soluţiile sistemului (5.41) (unde s-au făcut calcule folosind (5.38),(5.40)) sunt geodezice orizontale pe varietatea Riemann-Jacobi-Lagrange $(R^2 \setminus \Omega, g_{ij}, N_j^i)$ unde Ω este mulţimea punctelor de echilibru, iar N_j^i reprezintă o conexiune neliniară.

Teorema 5.5. *Orice traiectorie neconstantă a sistemului dinamic (5.41) care are energia totală H (constant) este o geodezică orizontală reparametrizată a varietăţii Riemann-Jacobi-Lagrange.*

$$(R^2 \setminus \Omega, g_{ij} = (H + f)\delta_{ij}, N_j^i = \Gamma_{jk}^i + F_j^i, i, j = \overline{1,2}) .$$

Pentru sistemul (8) calculăm f, L şi H.

$$f = \frac{1}{2}(cx_1{}^2 x_2 + bx_1)^2 + \frac{1}{2}(x_1 + ax_2 - 1)^2$$

(5.48)

$$L = \frac{1}{2}[(\frac{dx_1}{dt})^2 + (\frac{dx_2}{dt})^2] - (\mathrm{c}x_1{}^2 x_2 + bx_1)\frac{dx_1}{dt} -$$

$$(x_1 + ax_2 - 1)\ \frac{dx_2}{dt} +$$

$$+\frac{1}{2}(cx_1^{\ 2}x_2+bx_1)^2+\frac{1}{2}(x_1+ax_2-1)^2 \tag{5.49}$$

$$H=\frac{1}{2}[(\frac{dx_1}{dt})^2+(\frac{dx_2}{dt})^2]-\frac{1}{2}(cx_1^{\ 2}x_2+bx_1)^2-\frac{1}{2}(x_1+ax_2-1)^2 \tag{5.50}$$

Luăm ca funcţie Liapunov

$$V(x_1,x_2)=\frac{1}{2}(cx_1^{\ 2}x_2+bx_1)^2+\frac{1}{2}(x_1+ax_2-1)^2 \tag{5.51}$$

Verificăm condiţiile ce trebuie îndeplinite de funcţia V pentru ca sistemul să fie stabil.
V≥0

(gradV, F)
$$=(cx_1^{\ 2}x_2+bx_1)^2(2cx_1x_2+b)+(x_1+ax_2-1)^2a \tag{5.51'}$$

Dacă $(2cx_1x_2+b)\le 0, a\le 0$ sistemul este stabil. Deci sistemul este stabil dacă produsul dintre capitalul firmei şi volumul forţei de muncă este mai mic sau egal cu $\frac{-b}{2c}$.

Exemplul 5.10. Modelul simplu de tip Ramsey este descris de ecuaţia diferentială (5.52).

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{dz}{dt}\frac{dq}{dt}+(\frac{dq}{dt}-p)\frac{U'}{U''} \tag{5.52}$$

Mărimile economice ce apar sunt:

U - utilitatea consumului,
c - consumul,
z - raportul capital-muncă,

$\frac{dz}{dt}$ - rata acumulării de capital,

p - rata fixată a discontului, $p \geq 0$.

Folosim următoarele notaţii:

$$c = q(z) - \frac{dz}{dt} \tag{5.53}$$

$$U' = \frac{dU}{dt}, U' > 0 \tag{5.54}$$

$$U'' = \frac{d^2U}{dt^2}, U'' < 0 \tag{5.55}$$

Pentru studiu înlocuim ecuaţia diferenţială (5.52) cu sistemul de ecuaţii diferenţiale (5.56).

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 \frac{dq}{dt} + (\frac{dq}{dt} - p)\frac{U'}{U''} \end{cases} \tag{5.56}$$

Sistemului neliniar (5.56) îi asociem sistemul liniar (5.57). Pentru aceasta determinăm o integrală primă. Pentru sistemul neliniar (5.56) găsim funcţia Liapunov V dată de relaţia (5.58).

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 \frac{dq}{dt} \end{cases} \tag{5.57}$$

$$\frac{d}{dt}[-\frac{dq}{dt}\frac{x_1^{\ 2}}{2} + \frac{x_2^{\ 2}}{2}] = 0 \Rightarrow -\frac{dq}{dt}\frac{x_1^{\ 2}}{2} + \frac{x_2^{\ 2}}{2} = cons\tan t \text{ şi}$$

este o integrală primă.

Luăm ca funcţie Liapunov

$$V(x_1, x_2) = -\frac{dq}{dt}\frac{x_1^{\ 2}}{2} + \frac{x_2^{\ 2}}{2} \tag{5.58}$$

Verificăm condiţiile ce trebuie îndeplinite de funcţia V pentru ca sistemul să fie stabil. Dacă $\frac{dq}{dt}$<0 atunci V≥0.

$$(gradV, f) = \frac{\partial V}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2}[x_1\frac{dq}{dt} + (\frac{dq}{dt} - p)\frac{U'}{U''}] =$$

$$x_2(\frac{dq}{dt} - p)\frac{U'}{U''} \tag{5.59}$$

Dacă este îndeplinită condiţia $x_2(\frac{dq}{dt} - p)\frac{U'}{U''}$≤0 sistemul este stabil.

$\frac{dq}{dt}$<0, U'>0, U''<0, p≥0, deci x_2≤0.

Pentru ca sistemul să fie stabil trebuie ca rata acumulării de capital să fie o funcţie de timp crescătoare.

Rezultate deosebite în ceea ce priveşte stabilitatea sistemelor dinamice cu aplicaţii în economie şi în special cu aplicaţii în turism au fost obţinute în urma activităţii de cercetare realizate în perioada derulării contractului de cercetare 3C/27.01.2014, proiect declarat câştigător în cadrul Competiţiei interne de granturi, sesiunea 2013/2014, organizată de Universitatea din Craiova.

Capitolul VI

Spaţii vectoriale

6.1. Definiţia spaţiului vectorial. Exemple. Proprietăţi

Definiţia 6.1. *Fie V o mulţime, $V \neq Ø$. Pe mulţimea V definim legea de compoziţie internă „*" care îndeplineşte următoarele proprietăţi:*
G1) $(x*y)*z=x*(y*z),\ \forall x,y,z \in V$
G2) $\exists e_1 \in V$ *astfel încât* $x*e_1=e_1*x=x,\ \forall x \in V$
G3) $\forall x \in V, \exists x'$ *astfel încât* $x*x'=x'*x=e_1$
G4) $x*y=y*x\ \forall x,y \in V$
Perechea (V,) se numeşte grup comutativ.*

Definiţia 6.2. *Fie K o mulţime, K≠Ø. Pe mulţimea K definim două legi de compoziţie internă „$\wedge$" şi „$\vee$" care îndeplinesc următoarele proprietăţi:*
K1) $(\alpha \wedge \beta) \wedge \lambda = \alpha \wedge (\beta \wedge \lambda), \forall \alpha, \beta, \lambda \in K$
K2) $\exists e_2 \in K$ *astfel încât* $\alpha \wedge e_2 = e_2 \wedge \alpha = \alpha, \forall \alpha \in K$
K3) $\forall \alpha \in K, \exists \alpha''$ *astfel încât* $\alpha \wedge \alpha'' = \alpha'' \wedge \alpha = e_2$
K4) $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha, \forall \alpha, \beta \in K$
K5) $(\alpha \vee \beta) \vee \lambda = \alpha \vee (\beta \vee \lambda), \forall \alpha, \beta, \lambda \in K$
K6) $\exists e_3 \in K$ *astfel încât* $\alpha \vee e_3 = e_3 \vee \alpha = \alpha, \forall \alpha \in K$
K7) $\forall \alpha \in K, \alpha \neq e_2 \exists \alpha'''$ *astfel încât* $\alpha \vee \alpha''' = \alpha''' \vee \alpha = e_3$
K8) $\alpha \vee (\beta \wedge \lambda) = \alpha \vee \beta \wedge \alpha \vee \lambda$,
$(\beta \wedge \lambda) \vee \alpha = \beta \vee \alpha \wedge \lambda \vee \alpha,\ \forall \alpha, \beta, \lambda \in K$
Tripletul (K, $\wedge, \vee$) se numeşte corp.

Definiţia 6.3. *Fie K un corp. Se numeşte spaţiu vectorial (peste corpul K) un grup abelian (V,*) pe care este dată o lege de compoziţie externă cu operatori în K,*

$$K \times V \to V, (\alpha, x) \to \alpha \otimes x,$$

care verifică axiomele:

S1) $(\alpha \wedge \beta) \otimes x = \alpha \otimes x \wedge \beta \otimes x$,

S2) $\alpha \otimes (x * y) = \alpha \otimes x * \alpha \otimes y$,

S3) $\alpha \otimes (\beta \otimes x) = (\alpha \vee \beta) \otimes x$,

S4) $e_3 \otimes x = x$

oricare ar fi $\alpha, \beta \in K, x, y \in V$.

Elementele mulţimii V se numesc vectori. Elementele mulţimii K se numesc scalari. Legea de compoziţie internă definită pe V se numeşte adunarea vectorilor. Prima lege definită pe K se numeşte adunarea scalarilor iar cea de a doua înmulţirea scalarilor. Legea de compoziţie externă se numeşte înmulţirea vectorilor cu un scalar.

Observaţii:

1) (V,K, $\wedge$,$\vee$) este spaţiu vectorial peste corpul K.

2) Spaţiului vectorial V peste corpul K i se mai spune V K-spaţiu vectorial.

3) Când K=**R** se spune că V este spaţiu vectorial real. Când K=**C** se spune că V este spaţiu vectorial complex.

Exemplul 6.1. (R^n **,**R,+,·) este spaţiu vectorial.

$$R^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n), x_i \in R, i = \overline{1,n}\}$$

Adunarea vectorilor se defineşte astfel:

x*y=$x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n), \forall (x_1, x_2, ..., x_n),$
$y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n$

Înmulţirea unui vector cu un scalar se defineşte astfel:

$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n), \forall \alpha \in R, x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$

Exemplul 6.2. (C**,**R,+,·) este spaţiu vectorial.

$C = \{z, z = a + ib, i^2 = -1, a, b \in R\}$

Adunarea vectorilor se defineşte astfel:

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2), \forall z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2$
$\in C$

Înmulţirea unui vector cu un scalar se defineşte astfel:

$\alpha z = \alpha a + i\alpha b, \forall \alpha \in R, z = a + ib \in C$

Exemplul 6.3. ($M_{m,n}(R), R, +, \cdot$) este spaţiu vectorial al matricilor cu m linii şi n coloane cu elemente di mulţimea numerelor reale peste corpul numerelor reale.
Operaţia de adunare a vectorilor este cunoscuta operație de adunare a matricilor iar legea de compoziţie externă este înmulţirea unei matrici cu un număr real (se înmulţeşte fiecare element cu acel număr real).

Exemplul 6.4. ($R_n[X]$, R,+,·) este spaţiu vectorial al polinoamelor cu coeficienţi reali, de grad cel mult n, în nedeterminata X. Operaţia de adunare a vectorilor este operaţia de adunare a polinoamelor iar legea de compoziţie externă este înmulţirea cu numere reale a polinoamelor.

Exemplul 6.5. $(\{0\}, K, +, \cdot)$ este spaţiul vectorial nul, cu operaţia internă: 0+0=0 iar operaţia externă:

$$\forall \alpha \in K \Rightarrow \alpha \cdot 0 = 0$$

6.2. Subspaţii vectoriale

Fie (V,K,+,·) un spaţiu vectorial şi S o submultime nevidă a lui V.

Definiţia 6.4. *S se numeşte subspaţiu vectorial al lui (V,K,+,·) dacă:*

SV1) $\forall x, y \in S \Rightarrow x + y \in S$

SV2) $\forall \alpha \in K, \forall x \in S \Rightarrow \alpha \cdot x \in S$

Observaţie:

Orice subspaţiu S al lui V conţine vectorul nul al spaţiului.

Propoziţia 6.1. *Fie (V,K,+,·) un spaţiu vectorial şi S o submulţime nevidă în V. Atunci S este subspaţiu vectorial în V dacă şi numai dacă:*

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in S \Rightarrow \alpha x + \beta y \in S$$

Propoziţia 6.2. *Fie (V,K,+,·) spaţiu vectorial şi* $S \subset V, S \neq$ *o Ø. Atunci S este subspaţiu vectorial în V dacă şi numai dacă S are structură de spaţiu vectorial faţă de legile induse.*

6.3. Sistem de generatori. Dependenţă liniară. Baze

Fie (V,K,+,·) un spaţiu vectorial.

Definiţia 6.5. *Se numeşte combinaţie liniară a vectorilor* $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ *cu scalarii* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ *expresia:*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$$

Exemplul 6.6. În spaţiu vectorial $(R^3, R, +, \cdot)$ considerăm vectorii: $v_1 = (1,1,2); v_2 = (2,1,2); v_3 = (-1,1,1)$. Este vectorul $v = (3,4,2)$ o combinaţie liniară a vectorilor v_1, v_2, v_3?

Soluţie

Presupunem că există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ astfel încât să avem $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$

(3,4,2)=$\alpha_1 (1,1,2) + \alpha_2 (2,1,2) + \alpha_3 (-1,1,1)$

$(3,4,2) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)$

Se ajunge la sistemul:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 4 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 2 \end{cases}$$

cu soluţia $\alpha_1 = -13, \alpha_2 = 11, \alpha_3 = 6$.

Putem spune aşadar că vectorul v este o combinaţie liniară a vectorilor v_1, v_2, v_3.

Definiţia 6.6. *Fie I o mulţime nevidă. O funcţie* $f : I \to V$ *se numeşte familie de vectori în V. Dacă* $f(i) = v_i$ *atunci familia de vectori f se mai notează cu* $(v_i)_{i\in I}$*, iar I se numeşte mulţimea indicilor familiei.*

Definiţia 6.7. *Spunem că sistemul finit de vectori* $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$ *este liniar independent dacă*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$$

Definiţia 6.8. *O familie de vectori* $(v_i)_{i\in I}$ *se numeşte liniar independentă dacă orice sistem finit de vectori ai familiei este liniar independent.*

Definiţia 6.9. *Spunem că sistemul finit de vectori* $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$ *este liniar dependent dacă există* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$, *nu toţi nuli, astfel încât*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$$

Definiţia 6.10. *O familie de vectori* $(v_i)_{i\in I}$ *se numeşte liniar dependentă dacă orice sistem finit de vectori ai familiei este liniar dependent.*

Observaţii:

a) Un sistem de vectori este liniar independent dacă nu este liniar dependent.

b) Orice vector nenul constituie un sistem liniar independent.

c) Orice sistem de vectori care conţine vectorul nul este liniar dependent.

Propoziţia 6.3. *Fie* $S=(v_i)_{i\in I}$ *un sistem de vectori din* V *şi* $S_1 \subset S$. *Atunci*

a) dacă S_1 *este liniar dependent atunci* S *este liniar dependent;*

b) dacă S *este liniar independent atunci* S_1 *este liniar independent;*

Demonstraţie.

a) Fie $S_1=(v_1)_{i\in I_1}$ *cu* $I_1 \subset I$ liniar dependent. Atunci există o mulţime finită $J \subset I_1$ şi $\alpha_k \in K, k \in J$, nu toţi nuli, astfel încât $\sum_{j\in J} \alpha_j v_j = 0$. Cum $I_1 \subset I$ atunci $J \subset I$ şi $\sum_{j\in J} \alpha_j v_j = 0$, adică S este liniar dependent.

b) Presupunem prin absurd, că S_1 este liniar dependent. Cum $S_1 \subset S$ şi conform a) avem S liniar dependent, absurd. Prin urmare S_1 este liniar independent.

Propoziţia 6.4. *Fie* $S=(v_i)_{i\in I}$ *un sistem de generatori pentru V. Dacă S este liniar independent atunci orice vector* $v\in V$ *se descompune în mod unic în funcţie de vectorii din S.*

Demonstraţie.
Deoarece S este un sistem de generatori pentru V, există $J\subset I$, J finită, astfel încât $v=\sum_{j\in J}\alpha_j v_j$.

Presupunem că există J_1 o mulţime finită $J_1\subset I$ şi $\beta_k\in K, k\in J_1$ astfel încât $v=\sum_{k\in J_1}\beta_k v_k$. Din cele două descompuneri avem $v=\sum_{j\in J}\alpha_j v_j=\sum_{k\in J_1}\beta_k v_k$.

Notăm $A=J\cap J_1$ şi obţinem:

$$\sum_{i\in A}(\alpha_i-\beta_i)v_i+\sum_{i\in J-A}\alpha_i v_i-\sum_{i\in J_1-A}\beta_i v_i=0.$$

Cum S este liniar independent atunci:

$\alpha_i=\beta_i, i\in A$

$\alpha_i=0, i\in J-A$

$\beta_i=0, i\in J_1-A$

Şi deci descompunerea este unică.

Definiţia 6.11. *Se numeşte bază a lui V orice familie* $B=(e_i)_{i\in I}$ *de vectori din V care îndeplineşteconditiile:*

a) *B este liniar independentă*
b) *B este sistem de generatori pentru V.*

Observaţie:
Descompunerea unui vector într-o bază este unică.

Definiţia 6.12. *Fie* $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *o bază finită a lui V. Scalarii* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ *astfel încât* $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ *se numesc coordonatele lui v în baza B, iar matricea* $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ *se numeşte matricea coordonatelor vectorului v în baza B şi se notează* v_B.

Exemplul 6.7. În spaţiul vectorial (R^3 ,R,+,·) sistemul $S_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ cu $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ este o bază a lui R^3.

Exemplul 6.8. În spaţiul vectorial $(M_{m,n}(R), +\cdot)$ sistemul $S_2 = \left\{ E_{ij} = (e_{kl})_{\substack{k=\overline{1,m} \\ l=\overline{1,n}}}, (e_{kl}) = \begin{Bmatrix} 1, k = i, l = j \\ 0, k \neq i, l \neq j \end{Bmatrix} \right\}$ este o bază pentru $M_{m,n}(R)$.

Definiţia 6.13. *Un spaţiu vectorial (V,K,+,·) se numeşte spaţiu vectorial finit dimensional sau de tip finit dacă are o bază finită.*

Definiţia 6.14. *Fie (V,K,+,·) un spaţiu vectorial finit dimensional. Se numeşte dimensiunea spaţiului vectorial şi se notează prin dimV numărul de vectori ai unei baze.*

Teorema 6.1. (Teorema înlocuirii-Steinitz)

Fie $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *o bază a lui V şi* $F = \{f_1, f_2, ..., f_p\}$ *un sistem liniar independent de vectori din V. Atunci:*

1) $p \leq n$

2) după o eventuală renumerotare a vectorilor din B sistemul $\{f_1, f_2, ..., f_p, e_{p+1}, e_{p+2}, ..., e_n\}$ *este o bază a lui V.*

Consecinţa 6.1. *Toate bazele unui spaţiu vectorial finit V au acelaşi număr de vectori.*

Teorema 6.2. *Vectorii*
$e_1 = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}), ..., e_n = (a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn})$
din V formează o bază în V dacă şi numai dacă determinantul

matricei $T = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ . & & . \\ . & .... & . \\ . & & . \\ a_{1n} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ *este nenul.*

Demonstraţie. Necesitatea. Deoarece sistemul $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este liniar independent avem:

$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, sau

$T\alpha = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ unde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$.

Aşadar dintr-un sistem omogen rezultă numai soluţia banală. Acest lucru este posibil în cazul în cazul în care $\det T \neq 0$.

Suficienţa. Pentru a arăta că sistemul celor n vectori este sistem de generatori trebuie să vedem dacă pentru orice $v \in V$ există $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ astfel încât $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$.

Din combinaţia de mai sus rezultă sistemul de forma $T\alpha = v$ cu necunoscutele $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. Cum $\det T \neq 0$ soluţia se obţine prin regula lui Cramer. De asemenea independenţa sistemului rezultă imediat din $\det T \neq 0$.

Observaţie:

Dacă $\det T = 0$ sistemul de vectori nu formează o bază a lui V.

Definiţia 6.15. *Fie* $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *şi* $F = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ *două baze ale lui V, cu* $\dim V = n$. *Se numeşte matrice de trecere de la baza B la baza F matricea* $T_{BF} \in M_{n,n}(K)$,

$$T_{BF} = (t_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} \text{ unde } f_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i\,,\ j = \overline{1,n}.$$

Propoziţia 6.5. *Fie* $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *şi* $F = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ *două baze ale lui V, cu* $\dim V = n$. $T_{BF} = (t_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}$ *matricea de trecere de la baza B la baza F şi* $v \in V$. *Dacă* $v_B = (v_1, v_2, ..., v_n)^T$ *şi* $v_F = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$ *atunci* $v_B = T_{BF} v_F$.

Demonstraţie. Reprezentarea vectorului $v \in V$ în bazele B şi F este dată de relaţiile:

$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + ... + v_n e_n$ şi respectiv

$v = y_1 f_1 + y_2 f_2 + ... + y_n f_n$ (6.1a)

Înlocuind $f_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i, j = \overline{1,n}$ în (6.1a) obţinem:

$$v = \sum_{j=1}^{n} y_j (\sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} y_j t_{ij} e_i) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} t_{ij} y_j e_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} t_{ij} y_j) e_i \ .$$

Obţinem $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$ şi $v = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} t_{ij} y_j) e_i$ deci avem

$v_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} y_j, i = \overline{1,n}$. Matriceal putem scrie,

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & ... & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & ... & t_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & & . \\ t_{n1} & t_{n2} & ... & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$ care se mai scrie

$v_B = T_{BF} v_F$.

Lema 6.1. (Lema substituţiei) *Fie* $B=(e_i)_{i=\overline{1,n}}$ *o bază a spaţiului vectorial (V,K,+,·) cu dimV=n şi v un vector în V cu* $v_B=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)^T$. *Dacă considerăm sistemul de vectori* $B'=(e_1,e_2,...,e_{i-1},v,e_{i+1},...,e_n)$ *atunci:*

1) B' *este bază a lui (V,K,+,·) dacă şi numai dacă* $\alpha_i \neq 0$, *unde i este ordinul lui v în baza* B',

2) dacă B' *este noua bază, atunci* $x_{B'}=(x_1',....x_i',...,x_n')$, *unde*

$$x_1'=\frac{x_i}{\alpha_i}, x_j'=x_j-\frac{\alpha_j x_j}{\alpha_i}, \forall j\neq i, j=\overline{1,n}$$

cu $x_B=(x_1,...,x_i,...,x_n)$. *În acest caz,* α_i *se numeşte pivot iar formula de calcul pentru* x_j' *se numeşte regula dreptunghiului.*

Demonstraţie. Pentru a arăta că B' este bază vom arăta mai întâi liniar independenţa. Pornim de la egalitatea

$$\beta_1 e_1+...+\beta_{i-1}e_{i-1}+\beta_i v+\beta_{i+1}e_{i+1}+...+\beta_n e_n=0$$

Înlocuim pe v cu exprimarea sa în baza B şi obţinem:

$$\beta_1 e_1+...+\beta_{i-1}e_{i-1}+\beta_i(\alpha_1 e_1+...+\alpha_n e_n)+\beta_{i+1}e_{i+1}+...+$$
$$+\beta_n e_n=0$$

ceea ce implică

$$(\beta_1+\beta_i\alpha_1)e_1+...+\beta_i\alpha_i e_i+...+(\beta_n+\beta_i\alpha_n)e_n=0$$

Din faptul că B este bază, coeficienţii vectorilor $(e_i)_{i=\overline{1,n}}$ sunt nuli:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_i \alpha_i = 0 \\ \ldots \\ \beta_{i-1} + \beta_i \alpha_{i-1} = 0 \\ \beta_i \alpha_i = 0 \\ \beta_{i+1} + \beta_i \alpha_{i+1} = 0 \\ \ldots \\ \beta_n + \beta_i \alpha \ = 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

Relaţiile date de (6.1.) formează un sistem liniar omogen cu necunoscutele β_j care are numai soluţia banală dacă şi numai dacă $\alpha_i \neq 0$.

Pentru a arăta că B' este sistem de generatori considerăm vectorul $x \in V$ cu cooordonatele în baza B $(x_1,...,x_n)$. Se pune întrebarea dacă există $(x_1',...,x_n') \in K$ astfel încât

$$x = x_1' e_1 + ... + x_{i-1}' e_{i-1} + x_i' v + x_{i+1}' e_{i+1} + ... + x_n' e_n$$

Din exprimarea vectorului v în baza B, deoarece $\alpha_i \neq 0$ putem să-l exprimăm pe e_i astfel:

$$e_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} e_1 - ... - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} e_{i-1} + \frac{1}{\alpha_i} v - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} e_{i+1} - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} e_n .$$

Înlocuim pe e_i exprimat mai sus în reprezentarea vectorului x în baza B şi obţinem

$$x = (x_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_i} x_i) e_1 + ... + (x_{i-1} - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} x_i) e_{i-1} + \frac{x_i}{\alpha_i} v$$

$$+ (x_{i+1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} x_i) e_{i+1} + ... + (x_n - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} x_i) e_n$$

Comparând expresia vectorului x în baza B şi în baza B' obţinem existenţa scalarilor $(x_i')_{i=\overline{i,n}}$

$$\begin{cases} x_j' = x_j - \dfrac{\alpha_j}{\alpha_i} x_i, \forall j \neq i, j = \overline{1,n} \\ x_i' = \dfrac{x_i}{\alpha_i} \end{cases}$$

Aceste expresii demonstrează şi punctul 2).

Se poate deduce o regulă practică, numită regula pivotului de schimbare a bazei şi este dată de:

1) linia pivotului se împarte cu pivotul
2) coloana pivotului devine vector unitar de bază (cu 1 pe locul i şi în rest zerouri)
3) pentru orice alt element se aplică regula dreptunghiului.

Exerciţiul 6.1. Fie sistemul de vectori: $B_1 = \{v_1 = (1,2,0), v_2 = (1,2,3), v_3 = (0,1,1)\} \subset R^3$. Să se studieze dacă B_1 este bază.

Soluţie

a) Verificăm dacă B_1 este sistem liniar independent.

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ în cazul nostru devine

$$(\alpha_1, 2\alpha_1, 0) + (\alpha_2, 2\alpha_2 3\alpha_2) + (0, \alpha_3, \alpha_3) = 0$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, 3\alpha_2 + \alpha_3) = 0$$
$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Folosind metoda substituţiei rezultă uşor $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ deci sistemul este liniar independent.

b) Verificăm dacă B_1 este sistem de generatori.
$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ se poate scrie sub forma
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = x \tag{6.2}$$

Se ajunge la sistemul

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x_1 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = x_2 \\ 3\alpha_2 + \alpha_3 = x_3 \end{cases} \tag{6.3}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{detA=-3}$$

Deoarece $\det A \neq 0$ sistemul (6.3) este compatibil şi are soluţie unică. Această soluţie se obţine folosind regula lui Cramer. Deci $\forall x \in R^3$ aceasta se poate scrie sub forma (6.2). Deci B_1 este sistem de generatori.

Deoarece B_1 este sistem liniar independent şi sistem de generatori rezultă că B_1 este bază.

Capitolul VII

Aplicaţii liniare

7.1. Definiţia aplicaţiei liniare. Proprietăţi

Definiţia 7.1. *Fie V_1 şi V_2 două spaţii vectoriale finit dimensionale, peste acelaşi corp K.*
Funcţia $L: V_1 \to V_2$ se numeşte aplicaţie liniară dacă sunt îndeplinite condiţiile:

$$L(x+y)=L(x)+L(y)\ \ \forall x, y \in V_1 \qquad (7.1)$$

$$L(\alpha x) = \alpha L(x), \forall \alpha \in K, \forall x \in V_1 \qquad (7.2)$$

Exemplul 7.1. Aplicaţia nulă:

$0: V_1 \to V_2, 0(x) = 0$ pentru orice $x \in V_1$

este o aplicaţie liniară.

Exemplul 7.2. Aplicaţia identică

$1_{V_1} : V_1 \to V_2$, $1_{V_1}(x) = x$ pentru orice $x \in V_1$

este o aplicaţie liniară.

Exemplul 7.3. Aplicaţia
$L_1 : R^2 \to R^3$,
$L_1(x, y) = (x + 2y, x - y, 3x + 5y), \forall (x, y) \in R^2$

este o aplicaţie liniară.

Propoziţia 7.1. *Aplicaţia* $L: V_1 \to V_2$ *este liniară dacă şi numai dacă este îndeplinită condiţia*

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y), \forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in V_1 \qquad (7.3)$$

Demonstraţie. Directa. Aplicăm condiţia (7.1) şi apoi condiţia (7.2) din definiţia (7.1)

$$L(\alpha x + \beta y) = L(\alpha x) + L(\beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$$

Reciproca Dacă relaţia (7.3) este adevărată, atunci pentru $\alpha = \beta = 1$ obţinem condiţia (7.1) iar pentru $\beta = 0$ obţinem condiţia (7.2), adică aplicaţia este liniară.

Observaţie:

Mulţimea tuturor aplicaţiilor liniare

$$\{L : V_1 \to V_2 | \text{L este aplicaþie liniarã}\}$$

o notăm cu Ł(V_1, V_2) şi are structură de spaţiu vectorial în raport cu operaţiile:

$$(L_1 + L_2)(x) := L_1(x) + L_2(x), \forall x \in V_1$$

$$(\alpha L_1)(x) := \alpha L_1(x), \forall \alpha \in K, \forall x \in V_1$$

În literatura de specialitate sunt cunoscute două subspaţii vectoriale importante asociate unei aplicaţii $L \in$ Ł(V_1, V_2) şi anume:

ImL=$\{L(x) | x \in V_1\}$ numit imaginea lui L şi

KerL=$\{x \in V_1 | L(x) = 0\}$ numit nucleul lui L

În literatura matematică ca de exemplu în [26] sunt cunoscute următoarele proprietăţi:

Propoziţia 7.2. *Fie* $L \in Ł(V_1, V_2)$. *Are loc:*

1) *L(0)=0*

2) *L(-x)=-L(x),* $\forall x \in V_1$

3) *Dacă* $U \subset V_1$ *este subspaţiu vectorial, atunci L(U) este subspaţiu vectorial al lui* V_2.

4) *L este injectivă dacă şi numai dacă KerL=*$\{0\}$.

5) *Dacă* $S = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ *este un sistem liniar independent în* V_1 *şi L este injectivă atunci sistemul de vectori imagine* $L(S) = \{L(v_1), L(v_2), ..., L(v_p)\} \subset V_2$ *este un sistem de generatori.*

6) *Dacă* $S = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ *este un sistem de generatori în* V_1 *şi L este surjectivă atunci sistemul de vectori imagine* $L(S) = \{L(v_1), L(v_2), ..., L(v_p)\} \subset V_2$ *este un sistem de generatori.*

7) *Dacă* $B = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ *este o bază pentru* V_1 *şi L este bijectivă atunci sistemul de vectori imagine* $L(B) = \{L(v_1), L(v_2), ..., L(v_p)\} \subset V_2$ *este bază pentru* V_2.

Demonstraţie.

1) Condiţia (7.2) din definiţia (7.1) este:
$L(\alpha x) = \alpha L(x)$

Luând $\alpha = 0$, obţinem $L(0x) = ox$ adică L(0)=0 c.c.t.d.

2) Luând $\alpha = -1$, condiţia (7.2) din definiţia (7.1) devine:
$L(-1x) = -1L(x)$ adică $L(-x) = -L(x)$ c.c.t.d.

3) Dacă $U \subset V_1$ este subspaţiu vectorial atunci
$\alpha x + \beta y \in U, \forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in U$

Fie $L(x) = x_1 \in L(U)$ şi $L(y) = y_1 \in L(U)$. Atunci:
ceea ce demonstrează faptul că L(U) este subspaţiu vectorial.

4) *Necesitatea*. Presupunem L injectivă şi $x \in KerL$. Atunci L(x)=0 şi L(0)=0 (din punctul (1) al acestei propoziţii), care din injectivitate conduce la x=0, adică KerL$\subset \{0\}$. Cum KerL este subspaţiu vectorial avem $\{0\} \subset KerL$ şi prin urmare KerL=$\{0\}$.

Suficienta. Presupunem KerL=$\{0\}$şi L(x)=L(y) pentru orice x şiy din V1. Atunci L(x)-L(y)=0, adică L(x-y)=0, ceea ce ne spune că $x - z \in KerL$. De aici se obţine x=y, deci L este injectivă.

5) Pornind de la egalitatea
$\alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) + ... + \alpha_p l(v_p) = 0$

avem $L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_p v_p) = 0$

adică $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_p v_p \in KerL$

Cum L este injectivă, adică KerL=$\{0\}$, obţinem

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_p v_p = 0$ unde $\alpha_i = 0, i = \overline{1, p}$, deoarece S esteliniar independent în V1.

6) Cum S este sistem de generatori în V1, atunci pentru orice $x \in V_1$ există scalarii $\alpha_i \in K, i = \overline{1, p}$ astfel încât L(x)=y. Avem:

$$y = L(x) = L(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i L(v_i)$$

De aici deducem că orice vector $y \in V_2$ se poate scrie ca o combinaţie liniară de vectori din L(S), adică L(S) este un sistem de generatori în V_2.

7) Pentru ca L(B) să fie bază trebuie să fie sistem liniar independent şi sistem de generatori. Dacă la punctele (5) şi (6) în loc de L(S) luăm L(B) rezultă demonstraţia de la punctul (7).

Definiţia 7.2. *Dimensiunea lui ImL se numeşte rangul lui L, iar dimensiunea lui KerL se numeşte defectul lui L.*

Teorema 7.1. (Teorema dimensiunii) *Fie $L \in Ł(V_1, V_2)$ cu $dimV_1 = n \in N^*$. Atunci:*

$DimV_1 = dimKerL + dimImL$

Demonstraţia în $[26]$.

7.2. Reprezentarea matriceală a unei aplicaţii liniare

Fie $L \in Ł(V_1,V_2)$ cu $dimV_1=n$ şi $dimV_2=m$. Fie $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ şi $F = \{f_1, f_2, ..., f_m\}$ baze pentru V_1, respectiv V_2. Dacă $x \in V_1$ şi y=L(x) dorim să aflăm ce legătură există între componentele vectorului imagine y în baza F şi componentele vectorului x în baza B.

Avem următoarele descompuneri unice:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n \tag{7.4}$$

$$y = L(x) = y_1 f_1 + y_2 f_2 + ... + y_m f_m \tag{7.5}$$

unde $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt coordonatele vectorului x în baza B, iar $y_1, y_2, ..., y_m$ sunt coordonatele vectorului imagine L(x) în baza F.

Sistemul $\{ L(e_1), L(e_2), ..., L(e_n) \}$ din ImL este inclus în V_1 deci vectorii acestui sistem se pot scrie în mod unic ca şi combinaţii liniare cu vectorii bazei F. Avem:

$$\begin{aligned} L(e_1) &= \alpha_{11} f_1 + \alpha_{21} f_2 + ... + \alpha_{m1} f_m \\ L(e_2) &= \alpha_{12} f_1 + \alpha_{22} f_2 + ... + \alpha_{m2} f_m \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ L(e_n) &= \alpha_{1n} f_1 + \alpha_{2n} f_2 + ... + \alpha_{mn} f_m \end{aligned} \tag{7.6}$$

unde $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, ..., \alpha_{mi}, i = \overline{1,n}$ sunt coordonatele vectorului imagine $L(e_i)$ în raport cu baza F.

Folosind (7.4), (7.6) şi faptul că L este aplicaţie liniară, avem:

$$\begin{aligned} y = L(x) &= L(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j L(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j (\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i) = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j) f_i \ . \end{aligned} \tag{7.7}$$

Din (7.5) şi (7.7) rezultă

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j , j = \overline{1,m}$$

Putem scrie

$$\begin{cases} y_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n \\ y_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n \\ . \\ . \\ . \\ y_m = \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n \end{cases} \tag{7.8}$$

Matriceal (7.8) se poate scrie

$$Y=AX \tag{7.9}$$

unde Y este matricea coloană compusă din componentele vectorului imagine L(x) în baza F, X este matricea coloană compusă din componentele vectorului x în baza B, iar

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & & . \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K)$$

se numeşte matricea asociată aplicaţiei liniare L în pereche de baze B şi F, notată $[A]_{BF}$.

Pentru determinarea matricei asociată aplicaţiei liniare L în perechea de baze B,F se procedează astfel:

1) Se calculează imaginile vectorilor $e_i, i = \overline{1,n}$ din baza B, prin aplicaţia L.
2) Se calculează coordonatele vectorilor imagine $L(e_i), i = \overline{1,n}$ în baza F.

3) Se construieşte matricea asociată aplicaţiei liniare astfel: coloana j, $j=\overline{1,n}$ va fi formată cu coordonatele vectorului L(e_j) în baza F.

Definiţia 7.3. *Spunem că două spaţii vectoriale V_1 şi V_2 sunt izomorfe dacă şi numai dacă există o bijecţie $f:V_1 \to V_2$.*

Propoziţia 7.3. *Dacă B şi B' sunt două baze ale lui V_1, F şi F' două baze ale lui V_2, iar T este matricerea de trecere de la baza B la B' şi D matricerea de trecere de la baza F la F' atunci:* $[L]_{B'F'}=D[L]_{BF}T$

Demonstraţie. Dacă B' este bază a lui V_1, iar F' este bază a lui V_2, atunci din (aaa5) deducem:

$$L(x)_{F'}=[L]_{B'F'}x_{B'} \tag{7.10}$$

Coordonatele vectorului x în baza B' se scriu în funcţie de coordonatele vectorului x în baza B prin:

$$x_{B'}=T^{-1}x_B \tag{7.11}$$

De asemenea are loc:

$$L(x)_{F'}=D^{-1}L(x)_F \tag{7.12}$$

Înlocuind (7.11) şi (7.12) în (7.10) obţinem

$$L(x)_F=D[L]_{B'F'}T^{-1}x_B \tag{7.13}$$

Din (7.8) avem:

$$L(x)_F=[L]_{BF}x_B \tag{7.14}$$

Comparând relaţiile (7.13) şi (7.14) deducem ceea ce trebuia demonstrat.

7.3. Valori şi vectori proprii

Fie V un K spaţiu vectorial cu dimV=n şi L$\in$Ł(V,V). Notăm cu A matricea pătratică de ordinul n asociată aplicaţiei liniare L, A=$\left[A\right]_{BB}$, unde B este bază a lui V.

Definiţia 7.4. *Vectorul nenul $v \in V$ se numeşte vector propriu al matricei A (respectiv al aplicaţiei liniare L) dacă există $\lambda \in K$ astfel încât*

$$Av = \lambda v \text{ (respectiv } L(v) = \lambda v\text{)} \qquad (7.15)$$

Cu notaţiile de mai sus scalarul λ se numeşte valoare proprie a matricei A (respectiv a aplicaţiei liniare L) corespunzătoare vectorului propriu v.

Propoziţia 7.4. *Orice vector propriu corespunde unei singure valori proprii.*

Demonstraţie. Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că vectorul nenul $v \in V$ îi corespund două valori distincte λ_1 şi $\lambda_2 \in K$ astfel încât $L(v) = \lambda_1 v$ şi $L(v) = \lambda_2 v$. Din $\lambda_1 v = \lambda_2 v$ obţinem $(\lambda_1 - \lambda_2)v = 0$. Cum $v \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$. Aşadar presupunerea făcută este falsă. Deci valoarea proprie este unică.

Propoziţia 7.5. *O valoare proprie nu determină în mod unic un vector propriu.*

Demonstraţie. Dacă $\lambda \in K$ şi $L(v) = \lambda v$, atunci

$$L(\alpha v) = \alpha L(v) = \alpha\lambda v = \lambda(\alpha v), \forall \alpha \in K$$

Deducem că şi αv este vector propriu pentru λ.

Propoziţia 7.6. *Dacă* $L \in Ł(V,V)$ *şi* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in K$ *sunt valori proprii distincte atunci vectorii proprii corespunzători acestor valori proprii sunt liniar independenţi.*
Demonstraţia se poate găsi în $[26]$.

Definiţia 7.5. *Ecuaţia*

$$|A - \lambda I_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

se numeşte ecuaţia caracteristică a matricei A.

Propoziţia 7.7. *Polinomul caracteristic este invariant la schimbarea de bază.*

Demonstraţie. Fie B, B' două baze în V, T matricea de trecere de la baza B la baza B', A=$[L]_{BB}$ şi $A' = [L]_{B'B'}$. Atunci:

$$P'(\lambda) = \det(A' - \lambda I_n) = \det(T^{-1}AT - \lambda T^{-1} I_n T)$$
$$= \det T^{-1}(A - \lambda I_n)T = \det(A - \lambda I_n) = P(\lambda)$$

Definiţia 7.6. *Mulţimea*

$$S(\lambda) = \{v \in V | L(v) = \lambda v\}$$

se numeşte subspaţiu propriu asociat valorii proprii λ.

Definiţia 7.7. *Aplicaţia* $L \in Ł(V,V)$ *se numeşte diagonalizabilă dacă există B o bază în V astfel încât* $[L]_{BB}$ *este matrice diagonală.*

7.4. Forme liniare. Forme pătratice

Fie V_1 şi V_2 două spaţii vectoriale.

Definiţia 7.8. *O funcţie* $f : V_1 \times V_2 \to K$ *se numeşte funcţională biliniară, dacă sunt îndeplinite condiţiile:*

1) *f este liniară în raport cu primul argument, adică:*
$$f(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha f(x_1, y) + \beta f(x_2, y)$$

pentru orice $x_1, x_2 \in V_1, y \in V_2$ *şi orice* $\alpha, \beta \in K$

2) *f este liniară în raport cu al doilea argument, adică:*
$$f(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha f(x, y_1) + \beta f(x, y_2)$$

pentru orice $x \in V_1, y_1, y_2 \in V_2$ *şi orice* $\alpha, \beta \in K$

Exemplul 7.1.

$f : R^2 \times R^2 \to R, f(x,y) = 4x_2 y_1 + 3x_1 y_2$ este o funcţională biliniară, unde $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$.

În adevăr, pentru orice

$\alpha, \beta \in R, x = (x_1, x_2), x' = (x_1', x_2'), y = (y_1, y_2) \in R^2$

avem:

$f(\alpha x + \beta x', y) = 4(\alpha x_2 + \beta x_2')y_1 + 3(\alpha x_1 + \beta x_1')y_2$

$= \alpha(4x_2 y_1 + 3x_1 y_2) + \beta(4x_2' y_1 + 3x_1' y_2)$

$= \alpha f(x,y) + \beta f(x',y)$ ceea ce arată că f este liniară în raport cu primul argument.

În adevăr, pentru orice

$\alpha, \beta \in R, x = (x_1, x_2), y' = (y_1', y_2'), y = (y_1, y_2) \in R^2$
avem:

$$f(x, \alpha y + \beta y') = 4x_2(\alpha y_1 + \beta y_1') + 3x_1(\alpha y_2 + \beta y_2')$$
$$= \alpha(4x_2 y_1 + 3x_1 y_2) + \beta(4x_2 y_1' + 3x_1 y_2')$$
$$= \alpha f(x, y) + \beta f(x, y')$$

ceea ce arată că f este liniară în raport cu al doilea argument.

Definiţia 7.9. *Funcţionala biliniară $f \in B(V, V)$ se numeşte:*

1) simetrică dacă are loc relaţia:
$f(x, y) = f(y, x), \forall (x, y) \in V \times V$

2) antisimetrică dacă are loc relaţia:
$f(x, y) = -f(y, x), \forall (x, y) \in V \times V$

În cele ce urmează vom considera R-spaţiul vectorial V cu dimV=n.

Definiţia 7.10. *Fie o funcţională biliniară simetrică $f : V \times V \to R$. Aplicaţia $H : V \to R, H(x) = f(x, x)$ pentru orice $x \in V$ se numeşte funcţională pătratică definită pe R-spaţiul vectorial V.*

Teorema 7.2. *O funcţională pătratică $H(x) = f(x, x), f : V \times V \to R$ se poate reprezenta matriceal: $H(x) = f(x, x) = xAx^T$ unde $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in V$ şi $A = (a_{ij})$ este o matrice pătratică de ordinul n simetrică cu $a_{ij} = f(e_i, e_j) = f(e_j, e_i)$ reprezentând valorile formei pătratice pe mulţimea vectorilor unei baze $B = \{e_i\}, i = \overline{1, n}$ din V.*

Demonstraţie. Considerăm $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ o bază a spaţiului vectorial V şi $x \in V$. Vectorul x se poate scrie în mod unic în raport cu baza B:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$$

Atunci, funcţionala pătratică H(x) se scrie:

$$H(x) = f(x,x) = f(\sum_{i=1}^{n} x_ie_i, \sum_{j=1}^{n} x_je_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(e_i,e_j)x_ix_j$$

Dacă notăm $f(e_i,e_j) = a_{ij} \in R$ pentru orice $i,j=\overline{1,n}$ atunci funcţionala pătratică se poate scrie matriceal sub forma:

$$H(x) = f(x,x) = xAx^T \tag{7.16}$$

Observaţii:

Matricea A din (7.16) se numeşte matricea asociată funcţionalei pătratice.

Forma generală a lui H se poate scrie:

$$H(x) = f(x,x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + ... +$$
$$+ 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + ... + 2a_{2n}x_2x_n + ... + a_{nn}x_n^2$$

Exemplul 7.2.

$$H : R^3 \to R, H(x) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 7x_2x_3$$

Matricea funcţionalei pătratice H corespunzătoare bazei canonice din R^3 este:

$$H=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Definiţia 7.11. *Funcţionala pătratică H este sub forma canonică dacă*

$$H(y)=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\ldots+\lambda_n y_n^2$$

Matricea asociată acestei forme canonice este o matrice diagonală şi are forma:

$$D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Definiţia 7.12. *Funcţionala pătratică* $H \in B(V,V)$ *se numeşte:*

1) *pozitiv definită dacă:*

$H(x)\rangle 0, \forall x \in V-\{0\}$

2) *negativ definită dacă:*

$H(x)\langle 0, \forall x \in V-\{0\}$

3) *semipozitiv definită dacă:*

$H(x) \geq 0, \forall x \in V$

4) seminegativ definită dacă:

$H(x) \leq 0, \forall x \in V$

5) nedefinită dacă:

$\exists x, y \in V, x \neq y$ *astfel încât* $H(x) \rangle 0$ *şi* $H(y) \langle 0$

Observaţie:

Dacă H este de formă canonică, atunci natura ei poate fi uşor stabilită, după cum urmează:

1) H este pozitiv definită dacă

$\alpha_i \rangle 0, \forall i = \overline{1,n}$

2) 2) H este negativ definită dacă

$\alpha_i \langle 0, \forall i = \overline{1,n}$

3) H este semipozitiv definită dacă

$\alpha_i \geq 0, \forall i = \overline{1,n}$

4) 4) H este seminegativ definită dacă

$\alpha_i \leq 0, \forall i = \overline{1,n}$

5) H este nedefinită dacă

$\exists i', i'' \in \{1,2,...,n\}$ astfel încât $\alpha_{i'} \rangle 0, \alpha_{i''} \langle 0$

Metoda Jacobi este o metodă ce constă în aducerea funcţionalei pătratice cu matricea A la o nouă formă pătratică care are matricea B diagonală.

Teorema 7.3. *Fie o funcţională pătratică $H : V \to R$, $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază a lui V şi $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$ matricea lui H corespunzătoare bazei B. Dacă toţi minorii principali ai matricei A=(a_{ij}):*

$$\Delta_0 = 1, \Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, ..., \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ . & & . \\ . & ... & . \\ . & & . \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

sunt nenuli, atunci există baza $F = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ a lui V astfel încât

$$H(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + ... + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} y_n^2$$

unde $[x]_F = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$.

Teorema se poate demonstra folosind metoda inducţiei matematice.

Corolarul 7.1.

1) Funcţionala pătratică este pozitiv definită dacă şi numai dacă $\Delta_j \rangle 0, \forall j = \overline{1,n}$. Dacă există $\Delta_i = 0, \forall i = \overline{1,n}$, atunci funcţionala pătratică este semipozitiv definită.

2) Funcţionala pătratică este negativ definită dacă şi numai dacă $(-1)^i \Delta_i \rangle 0, \forall i = \overline{1,n}$. Dacă există $\Delta_j = 0, \forall j = \overline{1,n}$, atunci funcţionala pătratică este seminegativ definită.

3) Dacă rapoartele $\dfrac{\Delta_i}{\Delta_{j+1}}$ au semne diferite atunci funcţionala pătratică este nedefinită.

Teorema 7.4. (Teorema lui Sylvestre) *Numărul coeficienţilor strict pozitivi, respectiv numărul coeficienţilor strict negativi din forma canonică a unei funcţionale este invariant la schimbarea bazei.*

Exerciţiul 7.1. Fie $L : R^3 \to R^3$ o aplicaţie liniară dată prin:

L(x,y,z)=(2y+z,3x+z,x+2y)

a) Determinaţi KerL, ImL şi dimensiunile lor.
b) Calculaţi $[L]_{B_C B_C}$ unde BC este baza canonică din R^3.
c) Determinaţi valorile proprii ale aplicaţiei liniare L.

Soluţie

a) Determinăm Ker L

$$\begin{cases} 2y + z = 0 \\ 3x + z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Folosind metoda substituţiei găsim uşor x=y=z=0. Aşadar soluţia este (0,0,0) şi deci KerL=$\{0\}$ cu dimensiunea 0. Din teorema dimensiunii (dimV=dimKer+dimImL=3) rezultă că dimImL=3 deci ImL=R^3.

b) Vectorii din baza canonică, prin aplicaţia L, au următoarele imagini:

$$B_C = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$$

L(1,0,0)=(0,3,1)
L(0,1,0)=(2,0,2)
L(0,0,1)=(1,1,0)

Vectorii imagine (0,3,1), (2,0,2) şi (1,1,0) au următoarele exprimări în raport cu baza canonică:

$$(0,3,1) = 0e_1 + 3e_2 + 1e_3$$
$$(2,0,2) = 2e_1 + 0e_2 + 2e_3$$
$$(1,1,0) = 1e_1 + 1e_2 + 0e_3$$

De aici avem

$$[L]_{B_C B_C} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Determinarea valorilor proprii revine la a rezolva ecuaţia caracteristică:

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

Pentru acest exerciţiu această ecuaţie caracteristică se scrie astfel:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 1 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } -\lambda^3 + 9\lambda + 8 = 0$$

$(\lambda+1)(-\lambda^2+\lambda+8)=0$. Soluţiile sunt $\lambda_1=-1$,

$$\lambda_2=\frac{-1-\sqrt{33}}{-2}, \lambda_3=\frac{-1+\sqrt{33}}{-2}$$

Exerciţiul 7.2. Să se aducă la forma canonică funcţionala pătratică: $H: R^3 \to R$

$$H(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+10x_2^2+8x_3^2-4x_1x_2+12x_1x_3-4x_2x_3$$

Soluţie

Matricea lui H corespunzătoare bazei canonice din R^3 este:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ -2 & 10 & -2 \\ 6 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Minorii principali ai matricii A sunt:

$$\Delta_0=1, \Delta_1=2, \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 10 \end{vmatrix}=16,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 6 \\ -2 & 10 & -2 \\ 6 & -2 & 8 \end{vmatrix}=-192$$

Cum $\Delta_i \neq 0, i=\overline{0,3}$ se poate aplica metoda lui Jacobi. Aşadar există o bază F a lui R^3 în raport cu care funcţionala pătratică are formă canonică.

$$H(x)=\frac{\Delta_0}{\Delta_1}y_1^2+\frac{\Delta_1}{\Delta_2}y_2^2+\ldots+\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}y_n^2$$

$$H(x)=\frac{1}{2}y_1^2+\frac{2}{16}y_2^2+\frac{16}{-19}y_3^2$$

Exerciţiul 7.3. Fie funcţionala pătratică:

$$H(x)=x_2^2-x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3+8x_2x_4$$

Să se aducă la forma canonică şi să se stabilească natura ei.

Soluţie

Matricea ataşată este:

$$A=\begin{pmatrix}0&2&3&0\\2&1&0&4\\3&0&-1&0\\0&4&0&0\end{pmatrix}$$

Cum $\Delta_1=0$, nu se poate aplica metoda Jacobi. Vom face transformarea:

$$\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\\x_4=y_4\end{cases}$$

Cu această transformare funcţionala pătratică devine:

$$H(y) = (y_1 - y_2)^2 - y_3^2 + 4(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)$$
$$+ 6(y_1 + y_2)y_3 + 8(y_1 - y_2)y_4$$

$$H(y) = 5y_1^2 - 3y_2^2 - y_3^2 - 2y_1y_2 + 6y_1y_3 + 8y_1y_4$$
$$+ 6y_2y_3 - 8y_2y_4$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pentru această matrice minorii principali sunt:

$$\Delta_0 = 1, \Delta_1 = 3, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -16$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -20$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 320$$

Cum toţi minorii sunt nenuli putem aplica metoda Jacobi şi astfel obţinem forma canonică a funcţionalei pătratice H:

$$H(y) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} y_3^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_4} y_4^2$$

$$H(y) = \frac{1}{3} y_1^2 + \frac{3}{-16} y_2^2 + \frac{-16}{-20} y_3^2 + \frac{-20}{320} y_4^2$$

Cum H are şi termeni pozitivi şi negativi ea este nedefinită.

Capitolul VIII

Programare liniară

8.1. Probleme economice modelate prin probleme de optimizare liniară

8.1.1. Problema analizei activităţii (folosirii optime a resurselor sau a sortimentului optim)

O unitate economică având la dispoziţie cel mult cantităţile $b_1, b_2, ..., b_m$ din resursele $R_1, R_2, ..., R_m$, trebuie să producă produsele $P_1, P_2, ..., P_n$, prin procedee tehnologice fixate, care solicită cantitatea a_{ij} din resursa R_i pe cantitatea unitară de produs P_j. Se ştie că, prin livrarea cantităţii unitare de produs P_j, se obţine beneficiul c_j, $1 \leq j \leq n$. Se notează cu x_j cantitatea necunoscută din produsul P_j, $1 \leq j \leq n$, pe care unitatea economică trebuie s-o fabrice. Se cere să se determine $x_1, x_2, ..., x_n$, astfel ca beneficiul să fie maxim şi să se respecte condiţiile referitoare la disponibilul de resurse.

Modelul matematic al problemei este următorul:

Să se maximizeze funcţia liniară

$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, *în condiţiile:* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$, $i = 1,2,...,m$

Şi $\quad x_j \geq 0, j = 1,2,...,n$.

8.1.2. Problema planului optim de producţie

Fie atelierele $A_1, A_2, ..., A_n$ în care se fabrică sau se consumă produsele $P_1, P_2, ..., P_m$, în cantităţile date pe unitatea de timp, anume a_{ij} din P_i în atelierul A_j, $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$, cu interpretarea următoare:
dacă a_{ij} >0, A_j produce în unitatea de timp cantitatea a_{ij} din P_i;
dacă a_{ij} <0 consumă $-a_{ij}$, iar dacă $a_{ij} = 0$, A_j nu produce şi nu consumă P_i.

Producţia (respectic consumul) produsului P_i nu trebuie să fie sub limita (respectiv să depăşească) (respectiv $-b_i, dacă$ b_i<0), pentru $1 \le i \le m$.

Fie x_j timpul de funcţionare al atelierului A_j, iar c_j beneficiul obţinut prin funcţionarea lui A_j în unitatea de timp, $1 \le j \le n$. Un sistem de numere reale $(x_1, x_2, ..., x_n)$ constituie un plan optim de producţie, dacă maximizează beneficiul total, adică funcţia

$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, în condiţiile restrictive:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, 1 \le i \le m \text{ şi } x_j \ge 0, 1 \le j \le n.$$

Dacă c_j notează costul funcţionării atelierului A_j în unitatea de timp, se va cere minimizarea funcţiei cost

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

8.1.3. Problema dietei (a amestecului)

Să se determine cantităţile x_j din alimentele A_j, j=1,2,…,n, alcătuind o dietă $(x_1, x_2, ..., x_n)$, astfel încât costul acesteia $f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ să fie minim, unde c_j este costul unitar al alimentului A_j, dacă, în afară de c_j, $j = 1,2,...,n,$ se ştie componenţa în sbstanţe nutritive $S_1, S_2, ..., S_m$ a alimentelor $A_1, A_2, ..., A_m$, dată prin matricea $(a_{ij})_{1 \le j \le n}^{1 \le i \le m}$, unde a_{ij} este cantitatea de substanţă S_i aflată în unitatea de aliment A_j şi se impune ca fiecare dietă să conţină cel puţin b_i unităţi de substanţă
S_i, $i = 1,2,...,m$.

Condiţiile restrictive se scriu matematic:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i$, $i = 1,...,m$ şi $x_j \ge 0, j = 1,2,...,n$.

8.1.4. Problema de transport

Se dau: depozitele $D_1, ..., D_P$, având disponibilă o marfă în cantităţile $b_1, ..., b_p$; magazinele $M_1, ..., M_q$, solicitând marfa în cantităţile $b_1', ..., b_q'$; costurile unitare c_{ij} de transport al mărfii de la D_i la M_j. Se cere să se stabilească un program de transport, adică un sistem de numere reale nenegative $\{x_{ij}, i = 1,..., p, j = 1,..., q\}$, unde x_{ij} este cantitatea de marfă transportată de la D_i la M_j, care să facă minim costul de transport, adică

$f=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}c_{ij}x_{ij}$, să nu depăşească disponibilul din nici un depozit, adică $\sum_{j=1}^{q}x_{ij}\le b_i, i=1,...,p$ şi să satisfacă măcar cererea fiecărui magazin, adică:

$$\sum_{i=1}^{p}x_{ij}\ge b_j', j=1,...,q$$

Faptul că disponibilul total trebuie să depăşească sau să fie măcar egal cu cererea totală implică inegalitatea

$$\sum_{i=1}^{p}b_i\ge\sum_{j=1}^{q}b_j' \quad (*)$$

Dacă restricţiile problemei sunt date de egalităţi, atunci (*) devine egalitate, iar problema de transport se numeşte în acest caz echilibrată.

8.2. Formularea generală a unei probleme de programare liniară

În general o problemă de programare liniară are următoarele proprietăţi:

-restricţiile la care sunt supuse necunoscutele-ecuaţii sau inecuaţii-sunt liniare;

-se cere minimizarea sau maximizarea unei funcţii liniare

$f:R^n\to R, f(x)=\sum c_jx_j, x\in R^n$;

-necunoscutele nu pot lua valori negative, deci $x_j \geq 0, 1 \leq j \leq n$;

-coeficienţii numerici ce apar în f şi restricţii, ca şi necunoscutele, au valori reale.

Aşadar, o problemă de programare liniară sau un program liniar constă în determinarea unui optim (minim/maxim) absolut $x^0 \in R^n$, cu componente nenegative, al unei funcţii liniare $f : R^n \to R$ satisfăcând un sistem de m ecuaţii liniare (sau inecuaţii liniare) cu n necunoscute, de rang m.

Observaţie:

Se presupune, că sistemul liniar este compatibil şi că au fost reţinute numai m ecuaţii principale.

Forma numită standard a unui program liniar de minimizare (PL-min), respectiv de maximizare (PL-max), se prezintă astfel:

$$\text{PL-min} \begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, 1 \leq i \leq m \\ x_j \geq 0, 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Respectiv

$$\text{PL-max} \begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, 1 \leq i \leq m \\ x_j \geq 0, 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Matriceal forma standard se poate scrie astfel:

$$\text{PL-min}\begin{cases}\min\langle c, x\rangle \\ Ax = L \\ x \geq 0\end{cases}$$

respectiv

$$\text{PL-max}\begin{cases}\max\langle c, x\rangle \\ Ax = L \\ x \geq 0\end{cases}$$

S-au folosit următoarele notaţii:

$c = (c_1, c_2, ..., c_n)^t \in R^n = M_{n\times 1}(R)$,

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)^t \in R^n$,

$x \geq 0 \Leftrightarrow x_j \geq 0, 1 \leq j \leq n$,

$\langle c, x\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, (produsul scalar canonic pe R^n),

$L = (b_1, b_2, ..., b_n)^t \in R^m = M_{n\times 1}(R)$,

A=$((a_{ij})_{j=1,...,n}^{i=1,...,m} \in M_{m\times n}(R)$.

Funcţia $f(x) = \langle c, x\rangle, x \in R^n$, se numeşte funcţia-obiectiv sau funcţia de cost.

Condiţiile $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, 1 \le i \le m,$ se numesc restricţiile problemei, iar condiţiile $x_j \ge 0, 1 \le j \le n,$ se numesc condiţiile de nenegativitate.

Elementele mulţimii

$$P = \{x \in R^n, Ax = L, x \ge 0\}$$

se numesc programe sau soluţii admisibile sau posibile ale problemei de programare liniară. Un element $x^0 \in P$ se numeşte program optim al PL-min (PL-max), dacă $\langle c, x^0 \rangle \le \langle c, x \rangle, \forall x \in P$ (respectiv $\langle c, x^0 \rangle \ge \langle c, x \rangle, \forall x \in P$).

Notăm mulţimea programelor optime cu P^0 şi cu $c_j^A, 1 \le j \le n$ coloanele matricii A.

Definiţia 8.1. Un program $x \in P, x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ se numeşte program de bază, dacă vectorii coloană c_j^A pentru care $x_j \ne 0$ sunt liniar independenţi.

Observaţii:

1) Deoarece rangA=m, un program de bază are cel mult m componente nenule.
2) Dacă are exact m componente nenule, programul de bază se numeşte nedegenerat.
3) Dacă $0 \in$ P, convenim ca 0 să fie considerat program de bază.
4) Există cel mult $C_n^m = \frac{n!}{n!(n-m)!}$.

Definiţia 8.2. *Matricea B de tip* $m \times m$ *formată din coloanele lui A corespunzătoare componentelor nenule ale unui program de bază nedegenerat x se numeşte bază a programului x.*

8.3. Algoritmul simplex primal

Definiţia 8.3. *Se numeşte direcţie admisibilă într-un punct* $x^0 \in S$, *un vector* $d \in R^n$, *astfel încât* $x^0 + \alpha d \in S$, *oricare ar fi* $\alpha \geq 0$.

Definiţia 8.4. *Se numeşte direcţie extremală, pentru mulţimea S, un vector* $d \in R^n$, *care este direcţie admisibilă şi pentru care nu există două direcţii admisibile* d^1, d^2 *astfel încât* $d = \frac{1}{2}d^1 + \frac{1}{2}d^2$.

Definiţia 8.5. *Se numeşte soluţie admisibilă de bază pentru S, un vector,* $x^0 \in R^n$ *cu componentele* $x^0 = (x_1^0, ..., x_p^0, 0, ..., 0)^T$, *astfel încât* x^0 *este soluţie admisibilă, iar vectorii* $(a^1, ..., a^p)$ *sunt liniar independenţi.*

Definiţia 8.6. *Se numeşte matrice de bază, o matrice B formată cu coloane ale matricii A, astfel încât vectorii corespunzători să formeze o bază în* R^n.

Fie $B = (a^1, ..., a^m)$ *o matrice de bază, extrasă din A şi* $R = (a^{m+1}, ..., a^n)$. *Sistemul de restricţii al lui S se va scrie* $Bx^B + Rx^R = b; x^B \geq 0, x^R \geq 0$.

Propoziţia 8.1. *Dacă baza B extrasă din A, satisface condiţia* $B^{-1}b \geq 0$*, atunci* $x = (x^B, x^R)$ *cu* $x^B = B^{-1}b, x^R = 0$*, este soluţie admisibilă de bază.*

Fie $f : R^n \to R^n$, funcţia dată prin f(x)$= \langle c, x \rangle =$ $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i, c \in R^n$ şi mulţimea S cu $x^1, ..., x^p$ soluţii admisibile de bază $d^1, ..., d^q$ direcţii extremale.

Propoziţia 8.2.

1) *Condiţia necesară şi suficientă ca* $\min_{x \in S} f(x)$ *să fie finit este ca* $f(d^j) \geq 0, j = \overline{1, q}$.

2) Condiţia necesară şi suficientă ca $\max_{x \in S} f(x)$ *să fie finit este ca* $f(d^j) \leq 0, j = \overline{1, q}$.

Propoziţia 8.3. [26]

Fie $S = \{x \in R^n, Ax = b, x \geq 0\}$

Sistemul de restricţii sub formă standard a unei probleme de optimizare liniară. Fie $B = (a^1, ..., a^m)$*, o bază extrasă din A pentru care* $z^0 = B^{-1}b \geq 0$*. Pentru orice* $x \in S$*, şi* $f : S \to R$ *are loc relaţia*

$$f(x) = f(\overline{x}) - \sum_{j=m+1}^{n} x_j (z_j - c_j)$$

unde $z_i = \langle c^B, B^{-1}a^i \rangle = \sum_{i=1}^{n} c_j z_j^i$, $z_j^i = (B^{-1}a^i)_j ; i = \overline{m+1, n}$

şi $\overline{x} = (z^0, 0)^T$.

Demonstrație.

Din $Ax = b, x \geq 0$, rezultă $(B, R)\begin{pmatrix} x^B \\ x^R \end{pmatrix} = Bx^B + Rx^R = b$.

Deci $x^B = B^{-1}b - B^{-1}Rx^R = z^0 - \sum_{i=m+1}^{n} x_i B^{-1} a^i$. Astfel

$$f(x) = \langle c, x \rangle = \left\langle (c^B, c^R), (x^B, x^R) \right\rangle = \left\langle c^B, x^B \right\rangle + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j$$

$$\left\langle c^B, B^{-1}b \right\rangle - \left\langle c^B, B^{-1}Rx^R \right\rangle + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j = f(\overline{x}) -$$

$$\sum_{j=m+1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} c_i (B^{-1}a^i)_j - c_j\right) x_j = f(\overline{x}) - \sum_{j=m+1}^{n} (z_j - c_j) x_j$$

Propoziția 8.4. (Criteriul de optimalitate)

1) Dacă $\Delta_i = z_i - c_i \leq 0$*, pentru orice* $i = \overline{1, n}$*, atunci* $\overline{x} = (z^o, 0)$ *este punct de minim pentru funcția* $f(x) = \langle c, x \rangle$ *pe mulțimea S.*

2) Dacă $\Delta_i = z_i - c_i \geq 0$*, pentru orice* $i = \overline{1, n}$*, atunci* $\overline{x} = (z^o, 0)$ *este punct de maxim pentru funcția* $f(x) = \langle c, x \rangle$ *pe mulțimea S.*

Propoziția 8.5. (Criteriul de nemărginire)

Dacă există $k \in \{m+1, ..., n\}$*, astfel încât* $\Delta_k \rangle 0 (\Delta_k \langle 0)$ *pentru o problemă de minim(maxim) și* $z^k = B^{-1}a^k \langle 0$*, atunci funcția f nu are valoarea optimă finită pe S.*

Propoziţia 8.6. (Trecerea de la o iteraţie la alta)
Dacă există $k \in \{m+1,...,n\}$*, astfel încât* $\Delta_k \rangle 0 (\Delta_k \langle 0)$ *pentru o problemă de minim(maxim) şi dacă există* $i \in \{1,...,m\}$ *astfel încât*

$$\frac{z_i^0}{z_i^k} = \min_{j / z_j^k} \left\{ \frac{z_j^0}{z_j^k} \right\} \text{ şi } B' = \{a^1,...,a^{i-1}, a^k, a^{i+1},...,a^m\}$$

este bază corespunzătoare $\tilde{x}$ *, atunci*
$f(\tilde{x}) \leq f(\bar{x})(f(\tilde{x}) \geq f(\bar{x}))$. $\bar{x}$ *este soluţia admisibilă de bază corespunzătoare bazei* $B = (a^1,...,a^m)$.

Definiţia 8.7. *Baza B pentru care* $x^B = B^{-1}b \geq 0$ *se numeşte primal admisibilă.*

Algoritmul simplex primal are următoarele etape:

Etapa 1.

a) Se aduce problema de optimizare liniară sub forma standard;
b) Se determină o bază primal admisibilă extrasă din A şi se calculează $B^{-1}b, B^{-1}a^i, i = \overline{1,n}, \Delta_i = z_i - c_i; i = \overline{1,n}$

Se trece la etapa 2.

Etapa 2.

a) Dacă $\Delta_i \geq 0 (\Delta_i \leq 0), i = \overline{1,n}$ pentru problema de maxim (minim) s-a obţinut soluţia optimă, $\bar{x} = (B^{-1}b, 0)$. STOP
b) Dacă există $k \in \{1,...,n\}$ pentru care $\Delta_k \langle 0 (\Delta_k \rangle 0)$ în cazul de maxim (minim) şi pentru un astfel de indice $B^{-1}a^k \leq 0$, problema nu are valoare optimă finită. STOP

c) Dacă există $k \in \{1,...,n\}$ pentru care $\Delta_k \langle 0 (\Delta_k \rangle 0)$ în cazul de maxim (minim) şi pentru toţi astfel de indici nu avem $B^{-1}a^k \leq 0$, se trece la etapa 3.

Etapa 3.

Se alege k astfel încât $\Delta_k = \min_{i=\overline{1,n}}\{\Delta_i\}$ pentru probleme de maxim şi $\Delta_k = \max_{i=\overline{1,n}}\{\Delta_i\}$ pentru probleme deminim. Se determină $i \in \{1,...,m\}$, astfel încât

$$\frac{z_i^0}{z_i^k} = \min_{j/z_j^k}\left\{\frac{z_j^0}{z_j^k}\right\}$$

Vectorul a^i va ieşi din bază, iar vectorul a^k va intra în bază. Se trece la etapa 4.

Etapa 4.

Se efectuează itineraţie simplex, utilizând formulele

$$z'^0_j = z^0_j - \frac{z^k_j}{z^k_i} z^0_i, \ j = \overline{1,m}, \ j \neq i, z'^0_k = \frac{z^0_i}{z^k_i}$$

$$z'^h_j = z^h_j - \frac{z^k_j}{z^k_i} z^h_i, \ j = \overline{1,m}, \ j \neq i, z'^h_k = \frac{z^h_i}{z^k_i}, h = \overline{1,n}$$

$$\Delta'_j = \Delta_j - \frac{z^k_j}{z^k_i}\Delta_i; \ j = \overline{1.n}$$

Se trece la etapa 2.

Algoritmul simplex primal are un număr finit de etape căci numărul bazelor extrase din A este cel mult C_n^m.

Capitolul IX

Programare generală. Programare convexă

9.1. Programare generală. Punct şa

Fie $D \subset R^n$ o mulţime deschisă şi funcţiile $f, g_1, g_2, ..., g_m : D \to R$. Considerăm problema

$$\min_{x \in M} \{f(x)\}$$

$$M = \{x \in D | g_j(x) \le 0; j \in \{1,2,...,m\}\} \tag{9.1}$$

Dacă problema este una de maxim, se transformă în una de minim, ţinând seama de faptul că max(f)=-min(-f).

Definiţia 9.1. *Orice punct* $x \in M$ *se numeşte program al problemei (9.1).*

Definiţia 9.2. *Funcţia* $L : D \times R_+^m \to R$,

$$L(x,u) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} u_j g_j(x), u = (u_1, u_2, ..., u_m)^t \in R_+^m \tag{9.2}$$

se numeşte funcţia de tip Lagrange ataţată problemei (9.1).

Definiţia 9.3. *Fie L funcţia de tip Lagrange ataşată problemei (9.1). Un punct* (x_0, u_0) $x_0 \in D$ *şi* $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})^t \ge 0$ *se numeşte punct şa a lui L, relativ la D, dacă*

$$L(x_0,u) \le L(x_0,u_0) \le L(x,u_0), \forall x \in D; u \in R_+^m \tag{9.3}$$

Teorema 9.1. *Condiţia necesară şi suficientă ca* $(x_0,u_0)(u_0 \ge 0)$ *să fie punct şa, este dată de:*

$$L(x_0,u_0) \le L(x,u_0); \tag{9.4}$$

$$g_j(x_0) \le 0; j = \overline{1,m} \text{ (adică } x_0 \in M\text{)} \tag{9.5}$$

$$u_{0j} g_j(x_0) = 0; \forall j = \overline{1,m} \tag{9.6}$$

Demonstraţia în $[25]$.

Teorema 9.2. *Dacă* (x_0,u_0) *este punct şa pentru funcţia L, atunci* x_0 *este spoluţia optimă a problemei (9.1).*

Demonstraţie. Cum (x_0,u_0) este punct şa, rezultă $L(x_0,u_0) \le L(x,u_0);\ \forall x \in M$. Aceasta revine la

$$f(x_0) + \sum_{j=1}^{m} u_{0j} g_j(x_0) \le f(x) + \sum_{j=1}^{m} u_{0j} g_j(x)$$

Conform (9.6) avem

$u_{0j} g_j(x_0) = 0$ şi $u_{0j} \ge 0, g_j(x) \le 0, \forall j \in \{1,2,...,m\}$

Deci $f(x_0) \le f(x) + \sum_{j=1}^{m} u_{0j} g_j(x) \le f(x), \forall x \in M$,

adică x_0 este punct de minim al problemei date.

9.2. Programare convexă.Condiţii Kuhn-Tuckner

Definiţia 9.4. *Fie* $D \subset R^n$ *o mulţime deschisă, convexă şi funcţiile* $f, g_1, g_2, ..., g_m : D \to R$ *convexe pe D. Atunci problema (9.1) se numeşte problemă de programare convexă.*

Teorema 9.3. *Fie problema de programare convexă (9.1) în care presupunem că există cel puţin un program, x_i strict,*

$(g_j(x_1)\langle 0; j = \overline{1,m}),$ *adică condiţia lui Slater.*

Condiţia necesară şi suficientă ca x_0 să fie program optim al problemei este ca să existe $u_0 \geq 0$ *aşa încât* (x_0, u_0) *să fie punct şa pentru funcţia tip Lagrange L ataşată problemei.*

Adăugând la condiţiile de convexitate şi condiţii de diferenţiabilitate pentru funcţiile $f, g_1, g_2, ..., g_m$*, se obţine o problemă de programare convexă, diferenţiabilă.*

Teorema 9.4. (Teorema Kuhn-Tuckner) *Fie o problemă de programare convexă diferenţiabilă pentru care care condiţia lui Slater este satisfăcută.*

Punctul x_0 *este o soluţie optimă a problemei dacă şi numai dacă există* $u_0 \geq 0$*, astfel încât să avem*

$$\nabla_x L(x_0, u_0) = 0 \tag{9.7}$$

$$g_j(x_0) \leq 0; j = \overline{1,m} \tag{9.8}$$

$$u_{0j} g_j(x_0) = 0 \tag{9.9}$$

Demonstraţie. Conform Teoremei 9.3, x_0 este program optim al problemei dacă şi numai dacă există $u_0 \geq 0$ astfel încât (x_0, u_0) să fie punct şa al funcţiei L.

Conform Teoremei 9.1 aceasta este echivalent cu sistemul de condiţii (9.4), (9.5), (9.6). Mai trebuie să arătăm că (9.7) este echivalent cu (9.4). Presupunem mai întâi că avem (9.4), deci $L(x_0 u_0) \leq L(x, u_0), \forall x$. Deci x_0 este punct de minim pentru funcţia $L(x, u_0)$.

Cum f şi g_j sunt diferenţiabile, funcţia L este şi ea diferenţiabilă şi deci avem $\nabla_x L(x_0, u_0) = 0$.

Reciproc, dacă avem (9.7), adică $\nabla_x L(x_0, u_0) = 0$ rezultă că x_0 este punct staţionar al funcţiei $L(x, u_0)$. Dar f şi g_j fiind funcţii convexe, iar L fiind o combinaţie liniară cu coeficienţi pozitivi a acestora, rezultă că şi L este funcţie convexă, aşadar punctul său staţionar x_0 este minim global.
Deci $L(x_0 u_0) \leq L(x, u_0), \forall x \in M$.

Capitolul X

Modele deterministe de uzură şi înlocuire

10.1. Modele de uzură şi înlocuire

În orice activitate economică, utilajele, echipamentele, suferă în timpul utilizării lor un firesc proces de uzură, numită uzură fizică. În timpul utilizării, echipamentele necesită o continuă activitate de întreţinere şi reparare a eventualelor avarii, care urmăreşte prevenirea, diminuarea sau întârzierea procesului de uzură fizică.

În perioada de funcţionare a unui echipament, progresul tehnic poate duce la apariţia unor echipamente noi, cu aceeaşi arie de utilizare, dar cu performanţe calitative şi economice superioare. Acest lucru determină un alt tip de uzură a echipamentelor şi anume uzura morală.

Criteriul de decizie poate fi acela al cheltuielilor totale minime, când se urmăresc considerente economice, sau acela al maximizării beneficiului obţinut prin exploatarea echipamentului, atunci când scopul urmărit este randamentul acestuia.

Vom numi durată de viaţă a unui echipament intervalul de timp dintre momentul punerii în serviciu a acestuia şi momentul înlocuirii lui. Prin durată economică a vieţii echipamentului vom înţelege durata de viaţă optimă, conform criteriului stabilit. Întrucât diversele costuri sunt evaluate la diferite momente de timp, este necesară actualizarea valorilor în funcţie de procentul de dobândă, diferenţele devenind semnificative şi putând influenţa decizia pe perioade mai mari de timp.

10.2. Model determinist de înlocuire a unui echipament

Precizăm în continuare mărimile care apar în calcule:

V_0 este valoarea de achiziţionare a echipamentului considerat, inclusiv costul punerii sale în funcţiune, la momentul t=0.

V_n este valoarea de recuperare (de revânzare) a echipamentului la sfârşitul a n unităţi de timp de funcţionare.

C_n sunt cheltuieli de exploatare şi întreţinere a echipamentului în cursul celei de-a n-a unităţi de timp.

F_n sunt cheltuielile totale necesitate de echipament din momentul achiziţionării până la sfârşitul celei de-a n-a unităţi de timp.

f_n este costul mediu (raportat la unitate de timp) al echipamentului.

În general avem îndeplinite inegalităţile:

$V_0 \rangle V_1 \rangle ... \rangle V_k \rangle V_{k+1} \rangle ...$ inegalitate firească

$C_1 \langle C_2 \langle ... \langle C_k \langle C_{k+1} \langle ...$ inegalitate care nu este obligatorie

$$F_n = V_0 - V_n + \sum_{k=1}^{n} C_k$$

$$f_n = \frac{1}{n} F_n = \frac{1}{n} (V_0 - V_n + \sum_{k=1}^{n} C_k)$$

10.2.1. Model determinist discret de înlocuire a unui echipament cu actualizarea cheltuielilor

Precizăm mărimile noi care apar în calcule:

i este rata dobânzii

$\alpha = \dfrac{1}{1+i}$ $(0 \langle \alpha \langle 1)$ este coeficientul de actualizare

Este cunoscut faptul că o sumă S_0 investită la momentul t=0, cu rata dobânzii i, va produce în n ani suma:

$$S_n = S_0(1+i)^n = \frac{S_0}{\alpha^n}$$

În mod similar valoarea actuală S_0 a unei sume S_n ce va trebui plătită peste n ani este:

$$S_0 = S_n(1+i)^{-n} = S_n\alpha^n$$

Cheltuielile medii

$$f_n = \frac{1}{n}F_n = \frac{1}{n}(V_0 - \alpha^n V_n + \sum_{k=1}^{n}\alpha^{k-1}C_k)$$

Decizia se va lua după criteriul

$$\min_n f_n$$

10.2.2. Modelul determinist continuu de înlocuire a echipamentelor

Există modele matematice în care timpul este considerat ca o variabilă continuă adică $t \in [0, \infty)$. Fie V valoarea de achiziţionare şi punere în funcţiune a echipamentului la momentul t=0.

V$\alpha(t)$ este valoarea de recuperare a echipamentului la momentul t, factorul $\alpha(t)$ reprezentând deprecierea echipamentului în intervalul (0,t).

$\beta(t)$ este costul cumulat al exploatării şi întreţinerii echipamentului până la momentul t.

Asupra funcţiilor $\alpha : [0, \infty) \to R$, $\beta : [0, \infty) \to R$ vom face următoarele ipoteze plauzibile din punct de vedere economic:

1) $\alpha(0) = 1, \alpha(t)$ este o funcţie descrescătoare
2) $\lim\limits_{t \to \infty} \alpha(t) = 0$
3) $\beta(0) = 0$, $\beta(t)$ este o funcţie crescătoare.

Valoarea cheltuielilor totale la momentul t este:

$$F(t) = V - V\alpha(t) + \beta(t); t \geq 0$$

iar a cheltuielilor medii:

$$f(t) = \frac{1}{t} F(t) = \frac{1}{t}(V - V\alpha(t) + \beta(t)); t \rangle 0$$

Conform aceluiaşi criteriu de optimizare, momentul optim de înlocuire $\widehat{t}$ va fi acela care realizează min f(t). t>0

Din $f'(t) = 0$ rezultă $f(t) = \beta'(t) - V\alpha'(t)$. Din această ecuaţie se determină $\widehat{t}$ .Valoarea determinată $\widehat{t}$ este un minim al funcţiei f(t), dacă $f''(t) \rangle 0$.

Capitolul XI

Teoria probabilităţilor

11.1. Teoria probabilităţilor. Introducere

Teoria probabilităţilor este o teorie matematică deductivă, ce studiază fenomene întâmplătoare sau aleatoare de masă, care au proprietatea de stabilitate a frecvenţei apariţiei lor în condiţii identice.

Noţiunea centrală a teoriei probabilităţilor este probabilitatea, care se referă la aspectul cantitativ al categoriei filozofice de posibilitate şi reprezintă o măsură a posibilităţii producerii sau realizării unui eveniment în condiţii determinate.

Probabilitatea exactifică posibilitatea. Nu orice lucru posibil poate fi dotat cu probabilitate, deoarece noţiunea de probabilitate are sens numai într-un spaţiu bine definit, numit câmp de probabilitate.

Legătura dintre rezultatele teoriei probabilităţilor şi realitate se face prin legătura pe care frecvenţa relativă, indicator statistic, o stabileşte în anumite condiţii între probabilitate şi realitate.

11.2. Teoria probabilităţilor. Evenimente

După rezultatul obţinut în urma unei experienţe deosebim:

1) experienţe deterministe, la care rezultatul este unic determinat, adică previzibil;
2) experienţe aleatoare, la care rezultatul face parte dintr-o mulţime de rezultate posibile.

În continuare facem câteva precizări în legătură cu unele noţiuni elementare de probabilităţi. Orice reluare a experienţei se numeşte probă. Trebuie remarcat că orice experienţă se poate repeta de mai multe ori fără ca rezultatul să fie obligatoriu acelaşi. Evenimentul este rezultatul unei experienţe. Un eveniment elementar este un rezultat posibil al unei experienţe.

În continuare vom face unele notaţii cu ajutorul cărora vom opera în continuare.

1) E este mulţimea tuturor evenimentelor elementare sau compuse asociate unei experienţe cu un număr finit de rezultate posibile.
2) Ω este evenimentul sigur, ce se realizează în orice probă a experienţei. Dacă evenimentele elementare din E sunt $A_1, A_2, ..., A_n$, atunci evenimentul sigur se poate scrie:
$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$$
3) Ø este evenimentul imposibil, care nu se realizează în nicio probă a experienţei.
4) Notăm cu $\overline{A}$ evenimentul opus evenimentului A.
5) Notăm cu K o familie de submulţimi ale mulţimii Ω.

Definiţia clasică a probabilităţii

Dacă x este numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului A, iar y este numărul cazurilor posibile realizării evenimentului A, atunci se numeşte probabilitate în sens clasic a evenimentului A, numărul:

$$P(A) = \frac{x}{y}$$

Definiţia axiomatică a probabilităţii

Fie (Ω, K) *un câmp finit de evenimente. Se numeşte probabilitate pe acest câmp o funcţie* $P: K \to R$*, care satisface axiomele:*

1) $P(A) \geq 0$*, pentru orice* $A \in K$.

2) $P(\Omega) = 1$.

3) P este funcţie finit aditivă, adică pentru $A_1, A_2 \in K$ *cu* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ *are loc egalitatea:*

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

Observaţie:

1) P(Ø)=0.
2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
3) $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ (două câte două disjuncte).
4) Tripletul (Ω, K, P) este un câmp finit de probabilitate.
5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
6) $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} P(A_i \cap A_j)$

$$+ \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + ... + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$$

11.3. Evenimente independente. Probabilitate condiţionată

Definiţia 11.1. *Fie (Ω,K,P) un câmp de probabilitate cu P finit aditivă. Evenimentele A şi B din acest câmp se numesc P - independente sau independente dacă:*
$P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Definiţia 11.2. *Dacă* $(A_i), i \in I$, *este o familie finită sau infinită de evenimente se spune că (Ai) este o familie de evenimente independente, dacă pentru orice mulţime finită de indici distincţi* $i_1, i_2, ..., i_n \in I$ *are loc:*

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})...P(A_{i_n})$$

Observaţie:

Independenţa este o proprietate opusă dependenţei. Evenimentele A şi B se numesc dependente dacă:

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B).$$

Pentru exprimarea probabilităţii $P(A \cap B)$ în acest caz este nevoie de introducerea unui nou tip de probabilitate.

Definiţia 11.3. *Fie (Ω,K,P) un câmp de probabilitate cu P finit aditivă şi fie* $A \in K$ *cu* $P(A) \rangle 0$. *Se numeşte probabilitate condiţionată de evenimentul A a evenimentului* $B \in K$, *notată prin P(B-A) sau* $P_A(B)$, *raportul:*

$$P(B - A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Propoziţia 11.1. (Ω, K, P_A) *este un câmp de probabilitate.*

Definiţia 11.4. *Evenimentele A şi B se numesc dependente, dacă* $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$*, cu* $P(A)\rangle 0$ *sau* $P(A \cap B) = P(B)P(A - B)$ *cu P(B)>0.*

Observaţie:
Dacă $P(A)\rangle 0$ şi $P(B)\rangle 0$, atunci are loc:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B - A) = P(B)P(A - B)$$

11.4. Regula de înmulţire a probabilităţilor evenimentelor

Fie $A_1, A_2, ..., A_n$ evenimente din câmpul de probabilitate (Ω, K, P) cu $P(\bigcap_{i=1}^{k} A_i \neq 0, \forall k \in \{1,2,...,n\}$.
Are loc:

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 \cap A_2)...P(A_n / \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

Observaţie:

1) Probabilitatea unei intersecţii de evenimente depinde numai de independenţa sau dependenţa evenimentelor.
2) Probabilitatea unei reuniuni de evenimente depinde de compatibilitatea sau incompatibilitatea evenimentelor.
3) Fie (A_i) $i \in \{1,2,...,n\}$ o familie de evenimente independente şi compatibile. Avem:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = (\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i)$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)...P(\overline{A}_n) =$$

$$1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - P(A_i))$$

11.5. Formula probabilităţii totale şi formula Bayes

Fie (Ω, K, P) un câmp finit de probabilitate.

Definiţia 11.5. *Evenimentele* $A_1, A_2, ..., A_n$ *din* K *formează un sistem complet de evenimente sau o partiţie a evenimentului sigur, dacă:*

a) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$
b) $A_i \cap A_j = \emptyset$ *pentru* $i \neq j$

Propoziţia 11.2. (Formula probabilităţii totale)

Fie $A_1, A_2, ..., A_n$ *un sistem complet de evenimente cu* $P(A_i) \neq 0, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. *Oricare ar fi* $Y \in K$ *are loc:*

$$P(Y) = P(A_1)P(Y / A_1) + P(A_2)P(Y / A_2) + ... +$$

$$+ P(A_n)P(Y / A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(Y / A_i)$$

Formula lui Bayes

Fie $A_1, A_2, ..., A_n$ un sistem complet de evenimente cu

$$P(A_i) \neq 0, \forall i \in \{1,2,...,n\}.$$

Oricare ar fi $Y \in K$, cu $P(Y) \rangle 0$, are loc:

$$P(A_k / Y) = \frac{P(A_k)P(Y / A_k)}{P(Y)}, \text{ unde:}$$

$$P(Y) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(Y / A_i).$$

11.6. Scheme clasice de calcul al probabilităţii

11.6.1. Schema lui Poisson

Se consideră n urne ce conţin în diferite proporţii bile albe şi negre de aceeaşi mărime şi greutate. Probabilitatea de a extrage din urna i o bilă albă este p_i, iar o bilă neagră q_i ($q_i=1-p_i$), $i = \overline{1,n}$. Se extrage la întâmplare câte o bilă din fiecare urnă.

Probabilitatea ca din cele n bile extrase x să fie albe este egală cu coeficientul lui t^x din dezvoltarea polinomului de grad n:

$$P_n(t) = (p_1 t + q_1)(p_2 t + q_2)...(p_n t + q_n)$$

Exemplul 11.1. Se dau trei urne: prima conţine 2 bile albe şi 3 bile negre, a doua conţine 4 bile albe şi o bilă neagră iar a treia conţine 3 bile albe şi 2 bile negre. Care este probabilitatea ca extrăgând câte o bilă din fiecare urnă să avem 2 bile albe şi 1 neagră?

Soluţie n=3, x=2

$$P_3(t) = (\frac{2}{5}t + \frac{3}{5})(\frac{4}{5}t + \frac{1}{5})(\frac{3}{5}t + \frac{2}{5})$$

Coeficientul lui t^2 este probabilitatea căutată adică $\frac{58}{125}$.

11.6.2. Schema lui Bernoulli (a bilei revenite)

Se consideră o urnă cu bile albe şi negre de aceeaşi mărime şi formă. Notăm cu p probabilitatea de a extrage o bilă albă şi cu q=1-p probabilitatea de a extrage o bilă neagră.

Se fac n extrageri succesive, la întâmplare, cu reîntoarcerea bilei după fiecare extracţie. Probabilitatea ca din cele n bile extrase să fie x albe este:

$$P_n(x) = C_n^x p^x q^{n-x}.$$

Exemplul 11.2. Se aruncă 2 zaruri de 10 ori. Care este probabilitatea să apară de 4 ori suma 7 ?

Soluţie

1+6=7 4+3=7 $6 \times 6 = 36$

2+5=7 5+2=7 $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

3+4=7 6+1=7 q=1-$\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

n=10, x=4

Probabilitatea căutată este $C_{10}^4 (\frac{1}{6})^4 (\frac{5}{6})^6$.

11.6.3. Schema multinominală

Această schemă este o generalizare a schemei lui Bernoulli. În urnă se află bile de m culori, pentru care probabilitatea de a extrage o bilă de culoare i este $p_i, i=\overline{1,m}$. Se fac n extrageri succesive, la întâmplare, cu reîntoarcerea bilei după fiecare extracţie.

Probabilitatea ca din cele n bile extrase x_i să fie de culoarea i ($i=\overline{1,m}$) este:

$$P_n(x_1, x_2, ..., x_m) = \frac{n!}{x_1! x_2! ... x_m!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} ... p_m^{x_m}$$

11.6.4. Schema urnei cu bilă nerevenită

Fie o urnă cu N bile din care a sunt albe şi N-a sunt negre. Se extrag succesiv, la întâmplare, n bile $(n \langle N)$ fără reîntoarcerea în urnă înaintea următoarei extrageri, existând posibilitatea extragerii celor n bile deodată. Probabilitatea ca din cele n bile extrase x să fie albe este:

$$P_n(x) = \frac{C_a^x c_{N-a}^x}{C_N^n}$$

11.6.5. Schema urnei cu bile nerevenite în cazul mai multor culori

O urnă conţine a_i bile de culoare i, $i = \overline{1, m(m \geq 3)}$, bilele fiind de aceeaşi mărime. Se extrag simultan n bile, $n \langle a_1 + a_2 + ... + a_m = N$. Probabilitatea ca din cele n bile extrase x_i să fie de culoarea i,
$i = \overline{1, m}, x_1 + x_2 + ... + x_m = n$ este:

$$P_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{C_{a_1}^{x_1} C_{a_2}^{x_2} ... C_{a_m}^{x_m}}{C_N^n}$$

11.6.6. Schema lui Pascal

Fie urna din schema lui Bernoulli. Se fac mai multe extrageri, revenite până la onţinerea primei bile albe. Probabilitatea ca la extragerea x_i ($x \geq 1$) să se obţina prima bilă albă este

$$pq^{x-11}.$$

Exemplul 11.3. La un serviciu financiar sunt verificate lucrările a trei birouri, care lucrează corect în proporţie de 95%, 98% şi respectiv 99%. Se alege la întâmplare, câte o lucrare din fiecare birou. Cu ce probabilitate se vor găsi două lucrări corecte?

Soluţie

Se aplică schema lui Poisson cu 3 urne:

$p_1 = 0{,}95, q_1 = 0{,}05, p_2 = 0{,}98, q_2 = 0{,}02,$
$p_3 = 0{,}99, q_3 = 0{,}01$

Probabilitatea căutată este coeficientul lui t^2 din polinomul de gradul trei:

$$P_3(t) = (p_1 t + q_1)(p_2 t + q_2)(p_3 t + q_3)$$

$$P_3(t) = (0{,}95t + 0{,}05)(0{,}98t + 0{,}02)(0{,}99t + 0{,}01)$$

Probabilitatea căutată este coeficientul lui t^2 din polinomul de gradul trei adică $p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 + p_1 p_2 q_3$ şi făcând calculele obţinem 0,07663.

11.7. Variabile aleatoare

Mărimile aleatoare se deosebesc de mărimile variabile a căror dependenţă de factorii ce le determină este o dependenţă funcţională ce se modelează matematic cu ajutorul unei funcţii reale de mai multe variabile. Astfel, o mărime aleatoare X se caracterizează prin aceea că faptul că X ia valoarea "a" este un eveniment cu un anumit grad de realizare.

Definiţia 11.5. *Fie* (Ω, K, P) *un câmp (borelian) de probabilitate. Se numeşte variabilă aleatoare (unidimensională) pe acest câmp o funcţie* $X : \Omega \to R$ *cu proprietatea că pentru orice* $x \in R$ *are loc:*

$$\{\omega | \omega \in \Omega, X(\omega) \langle x\} \in K .$$

Observaţie:

1)Mulţimea $\{\omega | \omega \in \Omega, X(\omega)\langle x\} \in K$ se mai notează cu (X<x).
2) X(ω) se numeşte valoare a variabilei aleatoare X.

11.8. Funcţia de repartiţie

O caracterizare a unei variabile aleatoare, în care intervine esenţial probabilitatea, se face cu ajutorul funcţiei de repartiţie.

Definiţia 11.6. *Fie* (Ω, K, P) *un câmp (borelian) de probabilitate şi fie* $X : \Omega \to R$ *o variabilă aleatoare.*
Funcţia $F : R \to R$ *definită prin:*
$F(x) = P(X\langle x)$
se numeşte funcţie de repartiţie a variabilei aleatoare X.

Propoziţia 11.3. *Funcţia de repartiţie îndeplineşte condiţia:*

$0 \le F(x) \le 1, \forall x \in R$

Demonstraţie. Deoarece F(x) este o probabilitate, adică $F(x) = P(A)$ şi cum $0 \le P(A) \le 1, \forall A$ avem:
$0 \le F(x) \le 1, \forall x \in R$

Propoziţia 11.4. *Fie F funcţia de repartiţie şi facem următoarele notaţii:*

$F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x)$ *şi* $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x)$
Cu notaţiile făcute avem:
$F(\infty) = 1, F(-\infty) = 0$

Demonstraţie.
X<∞ este evenimentul sigur pe care l-am notat cu Ω şi se ştie că $P(\Omega)=1$ şi deci $F(\infty)=1$.
$X\langle-\infty$ este evenimentul imposibil pe care l-am notat cu Ø şi se ştie că P(Ø)=0.

Propoziţia 11.5. *Dacă* $a,b\in R, a\langle b,$ *atunci:*

$$P(a\langle X\langle b)=F(b)-F(a)$$

Demonstraţie. $(-\infty,a)\cup(a,b)=(-\infty,b)$ (q1)
$(-\infty,a)\cap(a,b)=$ Ø (q2)
Aplicând probabilitaea în (q1) şi folosind proprietăţile acesteia avem:

$$P(X\langle a)+P(a\langle X\langle b)=P(X\langle b)$$
$$P(X\langle a)=F(a), P(X\langle b)$$
$$P(a\langle X\langle b)=F(b)-F(a)$$

Ceea ce trebuia demonstrat.

Propoziţia 11.6. *Funcţia de repartiţie este monoton crescătoare.*

Demonstraţie. Din definiţia funcţiei monoton crescătoare avem că $a\langle b\Rightarrow F(a)\leq F(b)$. Cum $P(a\langle X\langle b)=F(b)-F(a)\geq 0$ fiind o probabilitate rezultă $F(b)-F(a)\geq 0$ şi deci $F(b)\geq F(a)$ adică $F(a)\leq F(b)$ ceea ce trebuia demonstrat.

Propoziţia 11.7. *Funcţia de repartiţie este continuă la dreapta în orice punct* $a\in R$.

Demonstraţie.

O funcţie F este continuă la dreapta dacă: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \rangle a}} F(x) = F(a)$.

Înlocuim în $P(a \langle X \langle b) = F(b) - F(a)$ pe $b = a + h, h \rangle 0$ şi trecem la limită pentru $h \to 0$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \rangle 0}} P(a \langle X \langle b) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \rangle 0}} F(a+h) - \lim_{\substack{\lim \to 0 \\ h \rangle 0}} F(a)$$

Evenimentul $a \langle X \langle a + h$ la limită devine evenimentul imposibil şi probabilitatea lui este zero.

Deci

$0 = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \rangle 0}} F(a+h) - \lim\limits_{\substack{\lim \to 0 \\ h \rangle 0}} F(a)$, adică $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \rangle 0}} F(a+h) = \lim\limits_{\substack{\lim \to 0 \\ h \rangle 0}} F(a)$

rezultă că $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \rangle a}} F(x) = F(a)$.

Am demonstrat aşadar că funcţia de repartiţie este continuă la dreapta în a.

Propoziţia 11.8. *Funcţia de repartiţie este continuă într-un punct a, dacă şi numai dacă P(X=a)=0.*

Demonstraţie.

La propoziţia 11.7. am văzut că $F(a+0) = F(a)$. Pentru ca F(x) să fie continuă în a este necesar şi suficient să avem $F(a-0) = F(a)$.

Calculăm limita la stânga, $F(a-0)$.

Pentru aceasta în $P(a \langle X \langle b) = F(b) - F(a)$ înlocuim a cu a-h şi b cu a.

$$P(a - h \langle X \langle a) = F(a) - F(a-h)$$

Când $h \to 0$ prin valori pozitive, evenimentul $a - h \langle X \langle a$ tinde către evenimentul $a \langle X \langle a$, adică X=a. Deci:

$$P(X = a) = F(a) - F(a - 0).$$

Observăm că $F(a) = F(a - h) \Leftrightarrow P(x) = 0 \Rightarrow$ ceea ce trebuia demonstrat.

Definiţia 11.7. *Fie F(x) funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare X. Dacă există o funcţie pozitivă $D_1(x)$, integrabilă pe intervalul $(-\infty, +\infty)$, cu proprietatea că pentru orice $x \in R$ este verificată egalitatea:*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} D_1(x)dx$$

atunci $D_1(x)$ se numeşte densitate de repartiţie sau densitate de probabilitate a variabilei aleatoare X.

Observaţie:

Această denumire este justificată de următoarele proprietăţi evidente:

$$P(a\langle X\langle b) = \int_{a}^{b} D_1(x)dx \text{ pentru orice interval } [a,b] \subset R \qquad (11.1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D_1(x)dx = 1 \qquad (11.2)$$

Definiţia 11.8. *Dacă funcţia $D_1(x)$ există şi este continuă în orice punct $x \in R$, vom spune că repartiţia variabilei aleatoare X este continuă.*

Observaţie:

În cazul când repartiţia variabilei aleatoare X este continuă, F(x) este evident continuă în orice punct x avem:

$$P(a \langle X \leq b) = P(a \leq X \langle b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \langle X \langle b) =$$
$$F(b) - F(a)$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Continuitatea funcţiei f(x) permite să aplicăm integralei teorema mediei. Există un punct $\tau \in (a,b)$ cu proprietatea că:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\tau) \text{ deci}$$

$$\frac{P(a \leq X \leq b)}{b-a} = f(\tau), a\langle \tau \langle b$$

Fie x_0 un punct fix arbitrar din intervalul $[a,b]$.

Când $(b-a) \to 0$ astfel ca x_0 să rămână în intervalul $[a,b]$, τ tinde către x_0 şi, datorită continuităţii

$$\lim_{\substack{(b-a)\to 0 \\ x_0 \in [a,b]}} f(\tau) = f(x_0).$$

Avem aşadar

$$f(x_0) = \lim_{\substack{(b-a)\to 0 \\ x_0 \in [a,b]}} \frac{P(a \leq X \leq b)}{b-a}.$$

Această egalitate justifică pe deplin denumirea de densitate de repartiţie sau densitate de probabilitate dată funcţiei f(x).

11.9. Tipuri de repartiţii unidimensionale

Definiţia 11.9. *Fie* (Ω, K, P) *un câmp de probabilitate. O variabilă aleatoare* $X:\Omega \to R$ *care ia un număr finit de valori se numeşte variabilă aleatoare simplă.*

Definiţia 11.10. *Fie* (Ω, K, P) *un câmp de probabilitate. O variabilă aleatoare* $X:\Omega \to R$ *se numeşte discretă dacă* $X(\Omega)$ *este cel mult numărabilă. Prin repartiţia variabilei aleatoare X se înţelege o matrice de forma:*

$\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ P_1 \ldots P_n \end{pmatrix}$ *sau pe scurt* $\begin{pmatrix} x_i \\ P_i \end{pmatrix}$ $\quad i = \overline{1, n}$

Observaţie:

Funcţia de repartiţie F a lui X este complet determinată de probabilităţile P_i, $i = \overline{1, n}$ astfel:

$$F(x_k) = P(X(x_k)) = \sum_{i=1}^{k} P_i$$

În acest caz se spune că F este de tip discret.

Definiţia 11.11. *Fie* (Ω, K, P) *un câmp borelian de probabilitate. O variabilă aleatoare* $X:\Omega \to R$ *se numeşte continuă, dacă există o funcţie* $D_1 : R \to [0,1]$ *integrabilă pe R, astfel incât:*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} D_1(x)dx$$

unde: F este funcţia de repartiţie a lui X.

F(x) este o funcţie de repartiţie continuă.

Expresia $D_1(x)dx$ se numeşte probabilitate elementară.

Funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare continue este o funcţie continuă.

11.10. Caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare

Fie (Ω, K, P) un câmp borelian de probabilitate şi $X, Y : \Omega \to R$, două variabile aleatoare.

1) **O caracteristică ce măsoară tendinţa centrală a repartiţiei variabilei aleatoare X este media, notată prin M(X).**

Dacă X este o variabilă aleatoare discretă cu repartiţia:

$\begin{pmatrix} x_i \\ P_i \end{pmatrix}$ $i \in I, P_i \geq 0, \forall i \in I, \sum_{i \in I} P_i = 1$, atunci

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i \,.$$

Dacă X este o variabilă aleatoare continuă cu repartiţia:

$X = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$, $x \in R, f(x) \geq 0, \forall x \in R$ şi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

atunci:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \,.$$

În general $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xdF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

Proprietăţi ale mediei:

1) Dacă $X(\omega) = b, b \in R, (\forall)\omega \in \Omega,$ atunci M(X)=b.
2) M(kX)=KM(X), oricare ar fi $k \in R^*$.
3) M(X+Y)=M(X)+M(Y).
4) M(XY)=M(X)M(Y).

2) **O altă caracteristică mai generală decât media este momentul iniţial de ordinul r, notat prin $M_r(X)$ sau $m_r(X)$ sau m_r.**

Definiţia 11.12. *Momentul iniţial de ordinul r este numărul*

$$m_r = M(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r dF(x)$$

dacă integrala Stieltjes este convergentă.
Dacă x este o variabilă aleatoare continuă, atunci:

$$m_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)dx .$$

Dacă x este o variabilă aleatoare discretă, atunci:

$$m_r = \sum_{i \in I} x_i^r p_i \ .$$

Pentru r =1 se obţine $m_r = M(X)$

3) **Asemănător este momentul iniţial absolut de ordinul r al lui X, notat prin $\overline{m}_r$ sau $\overline{M}_r(X)$.**

Definiţia 11.13. *Momentul iniţial absolut de ordinul r al lui X, notat prin $\overline{m}_r$ sau $\overline{M}_r(X)$ este media variabilei aleatoare $|X|^r$ adică $M(|X|^r)$.*

4) Dispersia lui X este o caracteristică care măsoară împrăştierea valorilor lui X faţă de medie.

Dacă X este o variabilă aleatoare discretă cu $M(X) = m\langle\infty$, atunci dispersia lui X este:

$$D(X) = \sum_{i \in I} (x_i - m)^2 p_i$$

Dacă X este o variabilă aleatoare continuă cu $M(X) = m\langle\infty$, atunci dispersia lui X este:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x)dx.$$

Observaţie:

În general,

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - M(X))^2 dF(x) = M\left[(X - M(X))^2\right].$$

Proprietăţi ale dispersiei:

Propoziţia 11.9. *Dacă* $X(\omega) = b$, *oricare ar fi* $\omega \in \Omega, b \in R$, *atunci D(X)=0.*

Demonstraţie. Fie $\begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$ repartiţia lui X, $M(X) = b\langle\infty$

D(X)=(b-b)^2 1=0.

Propoziţia 11.10. $D(bX) = b^2 D(X), \forall b \in R$

Demonstraţie.

$$D(bX) =$$
$$M\left[(bX - M(bX))^2\right] = M\left[b^2 (X - M(X))^2\right]$$
$$= b^2 M\left[(X - M(X))^2\right] = b^2 D(X)$$

Propoziţia 11.11. $D(X) = M_2(X) - M^2(X)$, *dacă* $M_2(X) \langle \infty$

Demonstraţie.

$$D(X) = M\left[(X - M(X))^2\right]$$
$$= M\left(\left[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)\right]\right)$$
$$= M(X^2) - 2M(X)M(X) + M^2(X)$$
$$= M(X^2) - M^2(X) = M_2(X) - M^2(X)$$

Propoziţia 11.12. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$ *dacă X şi Y sunt variabile aleatoare independente.*

Propoziţia 11.13. $D(X) \geq 0$

5) Abaterea medie pătratică a lui X

Definiţia 11.14. *Se numeşte abatere medie pătratică a lui X numărul* $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

6) Momentul centrat de ordinul r

Definiţia 11.15. *Dacă M(X) este finită se numeşte momentul centrat de ordinul r al lui X momentul iniţial de ordinul r al variabilei aleatoare (X-M(X)) şi se notează cu* $\mu_r(X)$ *sau* μ_r.

$$\mu_r(X) = m_r\left[\left(X - M(X)\right)\right] = M\left(\left[X - M(X)\right]^r\right)$$

Variabila X-M(X) se numeşte abaterea faţă de medie a variabilei aleatoare X.

BIBLIOGRAFIE

1. Bălă Dumitru, Şilaş Gh. - *Probleme privind stabilitatea dinamicii şi echilibrului unor sisteme mecanice*, Editura Şcoala Mehedinţului, Drobeta Turnu-Severin, 2001.

2. Barbu Viorel - *Metode matematice în optimizarea sistemelor diferenţiale*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1989.

3. Barbu Viorel - *Ecuaţii diferenţiale*, Editura Junimea, Iaşi, 1985.

4. Ciobanu Monica – „Legi de conservare ale unor sisteme dinamice oscilatorii”*, Buletinul celei de a IX-a Conferinţe de vibraţii mecanice, Timişoara, 1999*, vol. I, 115 - 120.

5. Ciobanu Monica - *Formes a variations associees a un systeme d equations differentielles ordinaires de deuxieme ordre et lois de conservation*, Seminarul de mecanica nr. 64, Tipografia Universităţii din Timişoara, 1999.

6. Duda I. - *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Editura ”România de mâine”, Bucureşti, 1999.

7. Georgescu Adelina - *Aproximaţii asimptotice*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1989.

8. Georgescu Adelina - *Sinergetica. Solitoni. Fractali. Haos determinist. Turbulenta. Monografii matematice 43*. Tipografia Universităţii din Timişoara, 1992.

9. Halanay A. - *Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale*, Editura Academiei, Bucureşti, 1963.

10. K. Huseyin - University of Waterloo, Faculty of Engineering, Department of Systems Design, Waterloo, Ontario, Canada, NOORDHOFF INTERNATIONAL PUBLISHING ALPHEN AAN DEN RIJN.

11. Megan Mihail - *Propriétés qualitatives des systèmes linéaires contrôlés dans les espaces de dimension infinie. Monographies mathematiques 32*, Tipografia Universităţii din Timişoara, 1988.

12. Megan Mihail - *Bazele analizei matematice*, volumul I, Editura Eurobit, Timişoara, 1996.

13. Megan Mihail - *Analiză matematică*, volumul III, Tipografia Universităţii din Timişoara 1989.

14. Neamțu Mihaela - Systemes dynamiques du premier ordre et lois de conservation, Seminarul de mecanică nr. 65, Tipografia Universităţii din Timişoara, 1999.

15. Obădeanu V. şi Boleanţu M. - Systèmes dynamiques et lois de conservation. Seminarul de mecanică 37. Tipografia Universităăii din Timişoara, 1993.

16. Obădeanu V., Groşanu I. - *Sisteme dinamice cu aplicaţii în biologie si economie*, Imprimeria Mirton, Timişoara, 1996.

17. Obădeanu V. et Vernic C. - Sur certains systemes biodinamiques et lois de conservation associes, Seminarul de mecanică 46,Tipografia Universităţii din Timişoara, 1995.

18. Petrişor Emilia - *Sisteme dinamice haotice. Monografii matematice 45*, Tipografia Universităţii din Timişoara, 1992.

19. Popescu O. şi alţii - *Matematici cu aplicaţii în economie*, Editura Didactică şi Pedagogică, R.A., Bucureşti, 1999.

20. Sireţchi Gh. - *Calcul diferenţial şi integral. Noţiuni fundamentale*, vol. I, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

21. *Stănăşilă O., Gussi Gh. şi Stoica T. - Matematică. Elemente de analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1991.

22. Bălă Dumitru - *Metode geometrice în studiul mişcărilor sistemelor vibrante şi vibropercutante*, Editura Universitaria, Craiova, 2004.

23. Mircea Gabriela, Neamţu Mihaela, Opriş Dumitru - *Bifurcaţia Hopf pentru sisteme dinamice cu argument întârziat şi aplicaţii*, Editura Mirton, Timiţoara, 2004.

24. Rocşoreanu Carmen – *Matematici aplicate în economie*, Editura TPT, Craiova, 2001.

25. Neamtu Mihaela - *Matematici aplicate în economie*, Partea I, Editura Cargo, Timişoara, 2002.

CUPRINS

Capitolul XI