Cuprins

Prefaţă vii

Capitolul 1. Analiză complexă 1
1. Introducere 1
   1.1. Modulul unui număr complex 3
   1.2. Proprietăţi algebrice ale numerelor complexe 4
   1.3. Reprezentarea geometrică a numerelor complexe 4
   1.4. Reprezentarea trigonometrică a numerelor complexe 4
   1.5. Punctul de la infinit. Sfera lui Riemann 6
   1.6. Operaţii cu numere complexe scrise sub formă trigonometrică 7
   1.7. Submulţimi remarcabile ale planului complex 7
   1.8. Structura topologică a planului complex 9
2. Funcţii complexe 12
   2.1. Exponenţiala complexă 13
   2.2. Funcţiile sin, cos, sinh, cosh complexe 14
   2.3. Logaritmul complex 15
   2.4. Funcţii trigonometrice inverse 16
   2.5. Funcţia putere complexă 17
3. Limite de funcţii 17
   3.1. Noţiuni şi rezultate topologice 17
   3.2. Limite de funcţii 19
   3.3. Limita la ∞ 20
4. Continuitate 21
5. Derivabilitate complexă. Relaţiile Cauchy-Riemann 22
   5.1. Relaţiile Cauchy-Riemann 26
   5.2. Funcţii armonice 30
6. Integrale complexe 38
   6.1. Drumuri şi curbe în $\mathbb{C}$ 38
   6.2. Drumuri rectificabile. Lungimea unui drum rectificabil 41
   6.3. Integrala complexă 43

6.4. Proprietăţi ale integralei complexe 44
6.5. Formule integrale Cauchy 53
6.6. Consecinţe ale Formulelor integrale Cacuhy 55
7. Serii de numere complexe 56
8. Serii de puteri 58
9. Funcţii analitice 64
10. Serii Laurent şi puncte singulare 67
10.1. Puncte singulare izolate 67
10.2. Serii Laurent 68
10.3. Clasificarea punctelor singulare izolate 76
10.3.1. Singularitatea la ∞ 81
11. Reziduuri şi Teorema reziduurilor 84
11.1. Reziduuri 84
11.2. Teorema reziduurilor 87
11.3. Reziduul la ∞ 90
12. Aplicaţii ale integralelor complexe 95
12.1. Calculul unor integrale trigonometrice reale 95
12.1.1. Integrale de forma $\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t$ 95
12.2. Calculul unor integrale improprii reale 96
12.2.1. Integrale de forma $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$ 97
12.2.2. Integrale de forma $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\alpha x\mathrm{d}x$ 104
12.2.3. Integrale de tipul $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$, unde Q are o rădăcină reală 110
13. Exerciţii rezolvate sau propuse spre rezolvare 115

Capitolul 2. Ecuaţii diferenţiale ordinare 133
1. Elemente de teoria ecuaţiilor diferenţiale 133
1.1. Introducere 133
1.2. Noţiuni de teoria ecuaţiilor diferenţiale ordinare 134
2. Tipuri de ecuaţii de ordinul întâi 140
2.1. Ecuaţii cu diferenţiale totale exacte 140
2.2. Ecuaţii cu variabile separabile 144
2.3. Factor integrant 150
2.4. Ecuaţii omogene 154
2.5. Ecuaţii reductibile la ecuaţii omogene 157
2.6. Ecuaţii liniare de ordinul întâi 160
2.7. Ecuaţii Bernoulli 170

2.8. Ecuaţii Riccati 172
2.9. Ecuaţii implicite în raport cu derivata 175
2.9.1. Ecuaţia Lagrange 176
2.9.2. Ecuaţia Clairaut 178
3. Existenţă şi unicitate 180
3.1. Rezultate preliminarii 180
3.2. Principiul contracţiilor 183
3.3. Teorema Ascuoli-Arzelá 185
3.4. Teoreme de existenţă şi de unicitate 186
4. Ecuaţii diferenţiale liniare 197
4.1. Ecuaţia liniară şi omogenă 197
4.2. Proprietăţi ale matricelor fundamentale 203
4.3. Soluţia generală a ecuaţiei omogene 205
4.4. Ecuaţia liniară neomogenă 207
4.5. Ecuaţii liniare cu coeficienţi constanţi 208
4.5.1. Proprietăţi ale matricelor exponenţiale 210
4.6. Calculul matricei fundamentale 215
4.6.1. Sinteza metodei de determinare a unei matrice fundamentale 220
4.7. Metoda lui Euler 227
4.8. Sisteme simetrice 238
5. Ecuaţii liniare de ordin superior 244
5.1. Ecuaţia omogenă şi ecuaţia neomogenă 244
5.2. Legătura dintre ecuaţiile de ordin d şi ordin întâi 245
5.3. Dependenţă şi independenţă liniară 245
5.3.1. Proprietăţi ale sistemelor fundamentale 249
5.3.2. Micşorarea ordinului unei ecuaţii liniare 251
5.4. Ecuaţia liniară neomogenă 252
5.5. Ecuaţii liniare cu coeficienţi constanţi 255
5.6. Ecuaţii de tip Euler 269
5.7. Ecuaţia de ordinul al doilea omogenă 273
5.7.1. Transformarea ecuaţiei de ordinul al doilea 276
5.7.2. Proprietăţi ale zerourilor 277
6. Ecuaţii integrale 284
6.1. Ecuaţia integrală liniară Fredholm 284
6.1.1. Scrierea funcţională a ecuaţiei 287
6.1.2. Proprietăţi ale operatorului integral Fredholm . . 287
6.1.3. Produsul a doi operatori integrali Fredholm 288
6.1.4. Metoda aproximaţiilor succesive 290

6.1.5. Metoda rezolventei 291
6.1.6. Ecuaţii integrale Fredholm cu nucleu degenerat . 296
6.1.7. Valori şi vectori proprii. Valori regulate 299
6.1.8. Metoda derivării 306
6.2. Ecuaţia integrală liniară Volterra 309
6.2.1. Scrierea funcţională a ecuaţiei 311
6.2.2. Proprietăţi ale operatorului integral Volterra ... 312
6.2.3. Produsul a doi operatori integrali Volterra 313
6.2.4. Metoda aproximaţiilor succesive 314
6.2.5. Metoda rezolventei 315
6.2.6. Ecuaţii integrale Volterra cu nucleu tranzitoriu . 319
6.2.7. Valori şi vectori proprii. Valori regulate 321

Capitolul 3. Serii Fourier 325
1. Introducere 325
2. Serii Fourier 329
3. Serii Fourier pe intervale de forma $[-L, L]$ 334
4. Convergenţa seriei Fourier 336
5. Serii Fourier de cosinusuri şi de sinusuri 343
5.1. Serii Fourier de cosinusuri 343
5.2. Serii Fourier de sinusuri 343
6. Serii Fourier pe intervale oarecare 349
7. Exerciţii rezolvate sau propuse spre rezolvare 353

Capitolul 4. Transformata Laplace 361
1. Introducere 361
2. Cadru teoretic general 362
2.1. Proprietăţi ale mulţimii $\mathfrak{L}$ 364
2.2. Proprietăţi operaţionale ale transformatei Laplace 377
2.3. Impulsuri scurte. Funcţia lui Dirac 394
2.4. Produsul de convoluţie 396
3. Exerciţii rezolvate sau propuse spre rezolvare 402
3.1. Determinarea transformatei unui original Laplace 402
3.2. Determinarea originalului Laplace, cunscându-i transformata 410
3.3. Aplicaţii la rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale 421
3.4. Aplicaţii la rezolvarea sistemelor de ecuaţii diferenţiale . 438
3.5. Aplicaţii la rezolvarea ecuaţiilor integrale sau integro-diferenţiale 441
3.6. Aplicaţii la determinarea unor integrale improprii 446

Capitolul 5. Transformata Fourier 451
1. Noţiuni şi rezultate preliminare 451
2. Transformata Fourier 454
   2.1. Proprietăţi ale transformatelor Fourier 454
3. O deducere formală a transformatei Fourier şi a inversei sale din seriile Fourier 462
   3.1. Reprezentare ca integrală Fourier 462
   3.2. Deducere a transformatei Fourier şi a inversei sale 467
   3.3. Spaţiul funcţiilor rapid descrescătoare 468
4. Produsul de convoluţie 472
5. Transformatele Fourier prin cosinus şi sinus 473
6. Exerciţii rezolvate sau propuse spre rezolvare 480

Capitolul 6. Transformata Z 487
1. Introducere 487
2. Noţiuni şi rezultate preliminarii 488
   2.1. Exemple de semnale discrete elementare 488
   2.2. Produsul de convoluţie 489
3. Transformata Z 490
   3.1. Proprietăţi ale transformatei Z 495
4. Aplicaţii 498
5. Exerciţii rezolvate sau propuse spre rezolvare 502

Bibliografie 505