Nicoleta-Corina BĂBĂLÎC

Nicoleta-Corina BĂBĂLÎC

SISTEME NELINIARE INTEGRABILE ȘI FENOMENOLOGIE SOLITONICĂ

EDITURA UNIVERSITARIA
Craiova, 2018

Referenți științifici:
Prof.univ.dr. Radu CONSTANTINESCU – Universitatea din Craiova
CS1 dr. Adrian Ștefan CÂRSTEA – IFIN-HH București-Măgurele

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
BĂBĂLÎC NICOLETA-CORINA BĂBĂLÎC
Sisteme neliniare integrabile şi fenomenologie solitonică / Nicoleta-Corina Băbălîc. - Craiova : Universitaria, 2018
Conţine bibliografie
ISBN 978-606-14-1452-9

53

1. INTRODUCERE

Procesele dinamice neliniare reprezintă, prin complexitatea lor, provocări ale ştiinţei moderne adresate unei categorii largi de specialişti, care include matematicieni, fizicieni, biologi, ingineri etc. Descrierea proceselor de evoluţie neliniare se poate face cu ajutorul unor ecuaţii diferenţiale, ordinare sau cu derivate parţiale, dar, în acelaşi timp, prin intermediul unor ecuaţii de evoluţie discrete.

Lucrarea de faţă şi-a propus analizarea unor metode generale, care permit studiul integrabilităţii sistemelor dinamice neliniare atât în spaţiu continuu cât şi în context discretizat. Mai mult chiar, am fost interesaţi de o clasă aparte de ecuaţii de evoluţie şi anume ecuaţiile care admit soluţii solitonice.

Conceptul de soliton a fost iniţial utilizat pentru a defini o "undă solitară" observată de J.S. Russell [1, 2] în 1834, o "undă de translaţie" care prezenta o deosebită stabilitate pe parcursul propagării ei. Ulterior, a fost descoperită o ecuaţie diferenţială cu derivate parţiale ale cărei soluţii au fost identificate ca fiind undele solitare observate de Russell. Această ecuaţie a devenit etalon pentru ceea ce numim astăzi ecuaţie solitonică, şi este cunoscută sub numele de ecuaţia Korteweg-de Vries (KdV) (1895) [3].

A fost necesară o perioadă îndelungată de timp pentru a se constata că există o întreagă clasă de ecuaţii solitonice, şi pentru a se conecta conceptul de *soliton* cu *teoria ecuaţiilor complet integrabile*, care a fost dezvoltată de N.J. Zabusky şi M.D. Kruskal începând cu anul 1965 [4].

Astăzi, fenomenologia solitonică, parte integrantă a studiului sistemelor dinamice neliniare, cunoaşte o dezvoltare deosebită, având numeroase aplicaţii în hidrodinamică [5]–[11], optică neliniară [12]–[31], geometrie diferenţială [32]–[36], fizica plasmei [37]–[42], biologie [43]–[47] şi teoria comunicaţiilor [48]–[52].

Există mai multe metode pentru studiul integrabilităţii şi pentru determinarea unor soluţii de tip soliton, admise de sistemele dinamice neliniare. Dintre aceste metode, în această lucrare vom acorda o atenţie specială *metodei împrăştierii inverse* (ISM) [53]–[66] şi *formalismului biliniar Hirota* [67]–[77]. Prima metodă (ISM) are ca element de bază existenţa unei perechi de operatori Lax [78]–[80], ca şi criteriu de integrabilitate pentru o anumită ecuaţie neliniară. A doua metodă, şi anume formalismul biliniar Hirota, oferă posibilitatea deducerii unor soluţii solitonice prin definirea unor operatori diferenţiali biliniari antisimetrici şi furnizează, totodată, o procedură de discretizare care conduce către noi sisteme complet integrabile.

În această carte sunt prezentate cele două metode pe exemple concrete şi importante de ecuaţii diferenţiale neliniare atât în spaţiu continuu cât şi discret [81]–[87]. Astfel, este abordată ecuaţia Ţiţeica propusă iniţial în teoria suprafeţelor geometrice [88, 89], dar regăsită ulterior ca un caz important de sistem dinamic neliniar din clasa modelelor de tip Toda [57]. Pentru această ecuaţie, studiată în două versiuni (Ţiţeica 1 şi Ţiţeica 2), deducem soluţii multisolitonice, pornind de la o reprezentare Lax propusă de Mikhailov [57, 58]. Soluţiile solitonice sunt generate cu ajutorul tehnicii "dressing" [53, 57]. Soluţia 1-solitonică este reconfirmată utilizând cea de a doua metodă de interes, metoda Hirota, fapt care permite o analiză comparativă succintă a rezultatelor furnizate de cele două metode.

Tot în această carte, formalismul Hirota este aplicat pentru studiul ecuaţiilor în două dimensiuni, în context semidiscret şi total discretizat. În mod concret, în afară de ecuaţia Ţiţeica deja amintită, mai sunt studiate studiate ecuaţiile KdV, mKdV (modified Korteweg-de Vries), sine-Gordon intermediară, Lotka-Volterra şi sistemul Volterra general în două dimensiuni.

Principalele contribuţii originale cuprinse în această carte şi publicate de autoare în reviste de specialitate, sunt legate de obţinerea unor clase noi de soluţii solitonice pentru ecuaţiile Ţiţeica 1 şi Ţiţeica 2, cât şi de generarea, pornind de la ecuaţiile KdV, mKdV, sine-Gordon intermediară, Lotka-Volterra şi sistemul Volterra general, a unui întreg set de ecuaţii discretizate complet integrabile. Aceste contribuţii sunt cuprinse în principal în capitolele 3 şi 4.

Capitolul 2 se deschide cu date istorice privind observarea undei solitonice şi introducerea noţiunii de soliton în terminologia ştiinţifică. Interesul tot mai crescut de care s-a bucurat în timp *solitonul* s-a datorat descoperirii ecuaţiilor care admit soluţii solitonice cu o arie largă de aplicabilitate. Capitolul continuă cu o prezentare succintă a metodei împrăştierii inverse (ISM) luând ca exemplu problema Cauchy pentru ecuaţia Schrödinger neliniară (NLS). Capitolul se încheie cu explicarea formalismului biliniar Hirota, o metodă eficientă de discretizare integrabilă a ecuaţiilor biliniare. Formalismul este aplicat în acest context asupra mai multor sisteme integrabile semidiscrete cu scopul construirii unor discretizări totale, complet integrabile: KdV, Lotka-Volterra şi mKdV.

Capitolul 3 este dedicat studiului ecuaţiilor Ţiţeica şi determinării soluţiilor acestora prin metoda "dressing". Prima secţiune a capitolului studiază o clasă de transformări pentru variabile care permit tranziţii între membri diferiţi ai "familiei ecuaţiilor Ţiţeica". Sunt identificate patru tipuri distincte de ecuaţii din această familie pe care le vom nota Ţ1 – Ţ4, care admit reprezentări Lax şi care pot fi rezolvate exact prin metoda împrăştierii inverse (ISM) [57, 84, 86, 87]. În continuarea capitolului utilizăm metoda "dressing" a lui Zakharov-Shabat [53, 58] şi grupul de reducţii introdus de Mikhailov [57], pentru a construi soluţiile de tip soliton ale ecuaţiilor Ţ1 şi Ţ2. Aceste soluţii pot să fie "cvasi-regulate" sau singulare, numărul şi formele posibile de singularităţi fiind şi ele analizate. Vom arăta că soluţiile respective, indiferent că se referă la Ţ1 sau la Ţ2, se pot împărţi în două mari categorii, solitoni de tipul unu şi solitoni de tipul doi, în funcţie de numărul de poli şi implicit şi de forma factorului "dressing". Vom vedea că şi soluţiile cele mai simple, adică cele 1-solitonice de tipul unu, pot să aibă un număr infinit de singularităţi pentru valori finite ale variabilelor independente. Astfel de singularităţi sunt caracteristice mai multor ecuaţii solitonice, de exemplu ecuaţiei Liouville [90]–[93], ecuaţiei sinh-Gordon, precum şi altora [92, 94, 95]. Aceste soluţii se pot transforma printr-o schimbare potrivită de variabile în soluţii cu doar două puncte singulare. Vom numi aceste soluţii, cu un număr mic de singularităţi, soluţii "cvasi-regulate". În acelaşi capitol sunt prezentate şi soluţii de tip N-soliton cu soluţii mixte N-solitonice, cu N_1 solitoni de tipul unu şi N_2 solitoni de tipul doi, unde $N = N_1 + N_2$. Deoarece Capitolul 4 al cărţii va fi dedicat metodei Hirota de rezolvare a ecuaţiilor solitonice, una dintre subsecţiunile Capitolului 3 va investiga modul în care se pot deduce soluţii solitonice prin această metodă pentru ecuaţiilor Ţ1 şi Ţ2. Soluţiile obţinute sunt compatibile cu cele generate prin metoda "dressing". În finalul capitolului sunt analizate pe scurt proprietăţile spectrale ale operatorului Lax L, sunt construite soluţiile analitice fundamentale (FAS) asociate şi se demonstrează că rezolventa operatorului are singularităţi care coincid cu polii factorului "dressing" şi ai inversului său.

Capitolul 4 aduce în prim-plan cea de-a doua metodă de interes şi anume formalismul biliniar Hirota. Pornind de la versiuni semidiscrete integrabile ale mai multor ecuaţii de evoluţie neliniare, construim ecuaţii discrete complet integrabile aplicând metoda propusă de Hirota. Astfel, inspiraţi de formele ecuaţiilor delay-Painleve, în primele 3 subsecţiuni ale capitolului, considerăm forme semidiscrete mai puţin cunoscute ale ecuaţiilor KdV, mKdV şi sine-Gordon intermediară [85]. Paşii formalismului biliniar Hirota pe care îi vom aplica ecuaţiilor menţionate sunt: discretizarea operatorilor Hirota, aplicarea invarianţei la etalonare sistemului biliniar discret obţinut, construirea soluţiei 3-solitonice (a cărei existenţă demonstrează integrabilitatea) şi găsirea formei neliniare discrete corespunzătoare ecuaţiei de la care s-a pornit. Un alt aspect interesant, pe care îl vom identifica la formele semidiscrete ale ecuaţiilor KdV şi mKdV, este existenţa unei transformări Miura unidirecţionale care face legătura cu formele clasice semidiscrete ale ecuaţiilor. Tot inspiraţi de ecuaţiile delay-Painleve, identificăm atât forma biliniară semidiscretă cât şi cea discretă a ecuaţiei Ţiţeica. În subsecţiunea următoare a cărţii vom studia reduceri de tip undă progresivă ale ecuaţiilor KdV şi mKdV discrete obţinute, arătând că deşi au ordin superior, pot fi integrate ca şi aplicaţii clasice QRT (Quispel-Roberts-Thompson). Penultima subsecţiune a capitolului cuprinde construirea prin formalismul biliniar Hirota a doua discretizări integrabile ale sistemului semidiscret Volterra general bidirecţional cu două componente [82, 83]. Totodată, vom prezenta şi forma soluţiei N-solitonice pentru ambele discretizări. Se observă că soluţia multi-solitonică găsită pentru a doua discretizare are aceiaşi factori de fază şi termeni de interacţie ca în cazul semidiscret. Încă o posibilă discretizare a sistemului este prezentată, însă pentru aceasta nu s-a identificat forma explicită a soluţiei solitonice, pe care o bănuim a fi mult mai complicată. În continuare studiem ecuaţia semidiscretă Lotka-Volterra pentru care vom construi o nouă formă discretă. Subsecţiunea, şi totodată şi Capitolul 4, se încheie cu o anexă care cuprinde demonstrarea prin metoda inducţiei a soluţiei N-solitonice pentru sistemul semidiscret Volterra general.

Capitolul 5 al cărţii cuprinde o serie de concluzii referitoare la ecuaţiile solitonice studiate şi formulează câteva probleme deschise la care am ajuns în cursul cercetării.

2. METODE GENERALE PENTRU DEDUCEREA SOLUŢIILOR SOLITONICE

2.1 Integrabilitate şi ecuaţii solitonice

Conceptele de *integrabilitate* şi *soliton* sunt două dintre noţiunile frecvent întâlnite în problematica modernă din fizica-matematică, cu implicaţii profunde în studiul proceselor evolutive neliniare.

Solitonul a fost pentru prima dată pus în evidenţă în 1834 de către proiectantul de bărci John Scott Russell, care a observat o undă de translaţie solitară, foarte stabilă într-un canal cu apă puţin adânc din Scoţia. Iată cum descria cu propriile sale cuvinte fenomenul pe care l-a numit ulterior *"marea undă de translaţie"*:

"Observam mişcarea unei bărci trasă rapid de o pereche de cai de-a lungul unui canal îngust, când, deodată, barca s-a oprit, nu însă şi masa de apă din canal pusă în mişcare; aceasta s-a acumulat în jurul prorei navei într-o stare de agitaţie violentă, apoi dintr-o dată, lăsând-o în urmă, s-a deplasat înainte cu mare viteză, luând forma unui val bine localizat, care şi-a continuat cursul de-a lungul canalului, aparent fără schimbarea formei sau diminuarea vitezei. Am urmărit călare valul de apă şi l-am observat evoluând cu o viteză de aproximativ opt - nouă mile pe oră, păstrându-şi forma originală de aproximativ treizeci de picioare în lungime şi cu o înălţime cuprinsă între un picior şi un picior şi jumătate. Înălţimea s-a diminuat gradual şi după o urmărire de o milă sau două l-am pierdut în şerpuirile canalului. Astfel, în luna august 1834, am avut prima mea întâlnire cu acel fenomen frumos şi singular pe care l-am denumit undă de translaţie." [1]

Observaţiile lui Russell au iniţiat o intensă investigaţie experimentală asupra proprietăţilor undelor hidrodinamice în urma căreia s-a ajuns la concluzia că aşa numita "*mare undă de translaţie*" este *o undă solitară foarte stabilă, care îşi păstrează forma neschimbată timp îndelungat în cursul evoluţiei, indiferent de interacţiile care apar cu alte unde solitare.*

În urma unor evaluări experimentale, Russell a arătat că viteza undei solitare depinde de amplitudine [2]. În acea perioada nu exista însă nici o teorie care să explice stabilitatea undei sau dependenţa de amplitudine a vitezei. În ciuda acestui fapt, bazându-se pe observaţiile sale experimentale, Russell a insistat că astfel de unde totuşi se produc. Oameni de ştiinţă ai vremii, precum G.G. Stokes şi G.B. Airy, l-au contrazis, convinşi fiind că o asemenea undă solitară cu formă permanentă nu poate exista. Astfel, s-a dat naştere unei mari controverse, care a durat mai bine de şaizeci de ani.

În 1895, Diederik J. Korteweg şi studentul său, Gustav de Vries [3], au descoperit o ecuaţie de evoluţie neliniară care descria fenomenul de propagare al undelor de amplitudine mică în ape puţin adânci. Această ecuaţie, numită ulterior KdV (Korteweg-de Vries), explica exact fenomenul observat de Russell în 1834. Ecuaţia descoperită de cei doi oameni de ştiinţa avea soluţii de tip undă cu formă permanentă. Ecuaţii care să descrie propagarea acestui tip de unde au mai fost deduse şi de J.V. Boussinesq (1871) şi Lord Rayleigh (1876) (de fapt primul care a găsit ecuaţia KdV a fost chiar Boussinesq, dar acesta a ignorat-o întrucât, derivatele temporale fiind de ordinul întâi în timp, descria doar excitaţii unidirecţionale, ceea ce era nefizic).

Primele aplicaţii fizice concrete ale ecuaţiei KdV au apărut abia în 1960. Studiind interacţia undelor electromagnetice libere, C.S.Gardner şi G.K. Morikawa au dedus, în anumite condiţii, exact KdV-ul.

O importanţă deosebită în descoperirea proprietăţilor speciale ale ecuaţiei KdV, o are celebra problemă Fermi, Pasta, Ulam (FPU), formulată în 1955 [96]. Presupunerea lui P. Debye (1914), potrivit căreia existenţa unei conductivităţi termice finite în solide se datorează anarmonicităţii, i-a condus pe Fermi, Pasta şi Ulam la realizarea un experiment numeric asupra unei reţele anarmonice unidimensionale. Aceştia porneau de la premisa că, datorită cuplajului neliniar, orice condiţie iniţială ”netedă” va conduce la echipartiţia energiei pe toate modurile de oscilaţie ale sistemului. Cei trei oameni de ştiinţă au considerat o reţea formată din $N = 64$ mase identice, cu interacţie neliniară între vecinii de ordinul întâi şi cu o dependenţă de deplasarea de la poziţia de echilibru a forţei de interacţie dată de expresia:

$$F(\Delta) = -K(\Delta + \alpha\Delta^2).$$

Ecuaţiile de mişcare corespunzătoare se pot scrie:

$$\frac{m}{K} y_{n,tt} = (y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n) + \alpha[(y_{n+1} - y_n)^2 - (y_n - y_{n-1})^2],$$

unde $n = 1, .., N - 1$. Aici N reprezintă numărul de oscilatori, iar K şi α sunt două constante. Mai mult, $y_0 = y_N = 0$, cu condiţia iniţială periodică $y_n(0) = \sin n\pi/N$ şi $y_{n,t}(0) = 0$. Funcţia $y_n(t)$ semnifică deplasarea masei din punctul n de la poziţia de echilibru. Experimentul numeric a arătat că nu există o echipartiţie reală a energiei, aceasta distribuindu-se doar pe câteva moduri, asupra cărora revine în mod recurent după un anumit timp.

Pentru a înţelege acest fenoment surprinzător N.J. Zabusky şi M.D. Kruskal (1965) [4], au considerat limita continuă a modelului FPU:

$$y_{tt} = y_{xx} + \epsilon y_x y_{xx} + \frac{h^2}{12} y_{xxxx} + O(\epsilon h^2, h^4),$$

unde h este constanta reţelei, $x = nh$ şi $\epsilon = 2\alpha h$, y_{tt} reprezintă derivata de ordinul doi în raport cu timpul t a funcţiei $y(x, t)$, iar y_x, y_{xx} şi y_{xxxx} reprezintă derivatele de ordinul 1, 2 şi respectiv 4 ale funcţiei $y(x, t)$ în raport cu x. Se poate observa că dezvoltarea de