MARIAN CIUPERCEANU

PROBLEME DE EXTREM

MARIAN CIUPERCEANU

PROBLEME DE EXTREM

Editura UNIVERSITARIA
Craiova, 2016

Referenți științifici:
Conf.univ.dr. Cristian Vladimirescu
Conf.univ.dr. Ionel Roventa

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
CIUPERCEANU, MARIAN P
Probleme de extrem / Marian Ciuperceanu. - Craiova : Universitaria, 2016
Conţine bibliografie
ISBN 978-606-14-1046-0

514
517

INTRODUCERE

În viaţa de toate zilele suntem atraşi de superlative, de lucruri sau situaţii care exprimă o calitate în gradul cel mai înalt. Ne interesează cel mai bun album sau piesă muzicală, cel mai bun film, cercetăm topuri din cele mai variate, căutăm cel mai ieftin R.C.A. pentru propria maşină ... Când lucrăm cu cifre, cel mai mare sau cel mai mic număr este nu numai interesant ci şi util.

În numeroase probleme practice sau teoretice se cere adeseori cea mai mare şi cea mai mică valoare pe care o poate lua o anumită mărime variabilă.

Lucrarea de faţă, structurată pe patru capitole, constituie o introducere în lumea minunată a maximelor şi minimelor funcţiilor de una sau mai multe variabile. Ea cuprinde, pe lângă noţiuni teoretice, exerciţii şi probleme prezentate gradat din punct de vedere al dificultăţii şi rezolvate complet.

Exerciţiile şi problemele de extrem sunt împărţite, pe de o parte în funcţie de numărul variabilelor funcţiilor studiate (capitolul II: „Extremele unei funcţii de o variabilă”, capitolul III: „Extremele unei funcţii de mai multe variabile”), iar pe de altă parte sunt grupate în funcţie de domeniile în care pot fi întâlnite extreme: în matematică, fizică, economie etc., ori după ramurile acestor discipline (extreme în geometrie, trigonometrie, analiză matematică sau extreme în mecanică, electricitate, optică etc.). Sunt abordate atât problemele de extrem liber cât şi cele de extrem condiţionat. Legătura cu practica a constituit un criteriu important de formulare a enunţurilor problemelor.

Rezolvarea pe mai multe căi a unor probleme de extrem, pe lângă motivele de ordin estetic, va permite compararea eficienţei acestora, precum şi alegerea contextului potrivit fiecăreia dintre modalităţile de rezolvare.

Primul capitol, “Maxime şi minime elementare de aritmetică“, îl introduce pe cititor în tema dată prin exerciţii şi probleme de aritmetică întâlnite încă din ciclul primar şi apoi gimnazial de învăţământ.

În cel de-al patrulea capitol, „Probleme de extrem rezolvate cu Excel şi Maple”, se amintesc câteva alternative ce fac apel la computer pentru determinarea extremului unor funcţii.

Autorul

CAPITOLUL I

MAXIME ŞI MINIME ELEMENTARE DE ARITMETICĂ

I.1. Proprietăţile inegalităţii între numerele naturale

Definiţie 1.1.1. Numărul natural x este mai mare sau cel mult egal cu numărul natural y $(x \geq y)$ dacă există un număr natural z astfel încât $x = y + z$.

Proprietăţile inegalităţii între numere naturale:

1. *Reflexivitatea:* $x \leq x$, oricare ar fi numărul natural x.

2. *Antisimetria:* $x \leq y$ şi $y \leq x$ rezultă $x = y$.

3. *Tranzitivitatea*: Dacă $x \leq y$ şi $y \leq z$ rezultă $x \leq z$.

4. Dacă $x \leq y$ atunci $x + z \leq y + z$ şi $x - z \leq y - z$.

5. Oricare ar fi numărul natural z, din $x \leq y$ rezultă $x \cdot z \leq y \cdot z$.

6. Oricare ar fi numărul natural z, din $x \leq y$ rezultă $x : z \leq y : z$

7. Oricare ar fi numerele naturale x, y are loc una şi numai una din relaţiile: $x < y$ sau $x = y$ sau $x > y$.

Dacă notăm prin $\max(x, y)$ cel mai mare dintre numerele x şi y, iar prin $\min(x, y)$ cel mai mic dintre numerele x şi y, atunci avem:

$$min(x,y) = \begin{cases} x, dacă\ x < y \\ x\ \ sau\ y, dacă\ x = y \\ y, dacă\ x > y \end{cases}$$

$$max(x,y) = \begin{cases} y, dacă\ x < y \\ x\ \ sau\ y, dacă\ x = y \\ x, dacă\ x > y \end{cases}$$

I.2. Exerciţii şi probleme aritmetice de maxim şi minim

I.2.1. Care este cel mai mic şi cel mai mare dintre toate numerele de şase cifre care se scrie cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 0, fiecare cifră fiind folosită o singură dată?

Rezolvare: $\overline{abcdef}_{max} = 543210$

$\overline{abcdef}_{min} = 102345$

I.2.2. Aflaţi cel mai mic număr natural care înmulţit cu 34 dă ca produs un număr de patru cifre?

Rezolvare: $34 \cdot x_{min} = \overline{abcd}$

Deoarece: $34 \cdot 29 = 986 < \overline{abcd}$ şi

$34 \cdot 30 = 1020 \geq 1000$

găsim $x_{min} = 30$.

I.2.3. Aflaţi cel mai mare număr natural care înmulţit cu 27 dă ca produs un număr de cinci cifre.

Rezolvare: $27 \cdot x_{min} = \overline{abcde}$

Prin încercări, găsim $x_{min} = 3703$.

I.2.4. Dintr-un săculeţ cu 9 bile marcate de la 1 la 9 extrag, la întâmplare, 5 bile şi notez cu A suma numerelor înscrise pe bile şi cu B suma numerelor înscrise pe bilele rămase.

Calculaţi valoarea minimă şi maximă posibilă pentru diferenţa dintre A şi B: A-B.

Rezolvare:

$min(A-B) = minA - maxB = (1+2+3+4+5) - (6+7+8+9) = 15 - 30 = -15$

$max(A-B) = maxA - minB = (9+8+7+6+5) - (4+3+2+1) = 35 - 10 = 25$.

I.2.5. Într-un săculeţ se află 100 de cartonaşe pe care sunt scrise diferite numere naturale. Care este numărul minim de cartonaşe pe care trebuie să le scoatem din săculeţ ca să fim siguri că între ele găsim două cu numere naturale având aceeaşi cifră a unităţilor?

Rezolvare: Deoarece cifra unităţilor nu poate lua decât 10 valori: 0, 1, 2,…, 9, dacă scoatem $10 + 1 = 11$ cartonaşe, conform principiului lui Dirichlet, sigur există cel puţin 2 cartonaşe cu aceeaşi cifră a unităţilor.

I.2.6. Într-o cutie se află 7 creioane negre şi 10 creioane colorate. Luând la întâmplare 9 creioane, care este numărul minim şi numărul maxim de creioane pe care le putem găsi?

Rezolvare:

$N_{min} = 9 - 7 = 2$ creioane colorate

$N_{max} = 9$ creioane colorate

I.2.7. Aflaţi cel mai mare număr natural care se poate exprima ca o diferenţă de două numere de trei cifre.

Rezolvare: Pentru ca diferenţa să fie maximă, descăzutul trebuie să fie maxim, iar scăzătorul, minim.

Numărul cerut este: $999 - 100 = 899$

I.2.8. Dacă $\{a, b, c, d\} = \{1,2,3,4\}$, aflaţi valoarea maximă şi minimă a produsului $\overline{ab} \cdot \overline{cd}$.

Rezolvare: $P_{min} = 13 \cdot 24$

$P_{max} = 41 \cdot 32$

I.2.9. Ştiind că $x + y = 100$ şi $3 \leq x \leq 25$, aflaţi maximul şi minimul lui y.

Rezolvare: $y = 100 - x, 3 \leq x \leq 25$

$$y_{min} = 100 - x_{max} = 100 - 25 = 75$$

$$y_{max} = 100 - x_{min} = 100 - 3 = 97$$

I.2.10. Aflaţi cel mai mare şi cel mai mic număr natural care împărţit la 6 dă restul 3 şi împărţit la 8 dă restul 7.

Rezolvare:

Din $x = 6 \cdot c_1 + 3$ obţinem: $x \in \{3, 9, 15, 21, 27, 33, \dots\}$
Din $x = 8 \cdot c_2 + 7$ găsim: $x \in \{7, 15, 23, \dots\}$

Deci primul număr ce se regăseşte în ambele mulţimi (şi care reprezintă cel mai mic număr care împărţit la 6 dă restul 3 şi împărţit la 8 dă restul 7) este 15.

I.2.11. Aflaţi cel mai mare şi cel mai mic număr natural de forma $\overline{abc}$ cu proprietatea că $\overline{abc} - \overline{cba} = 198$.

Rezolvare: Egalitatea din enunţ se scrie:

$99(a - c) = 198$

de unde rezultă: $a - c = 2$.

Deci $\overline{abc}_{min} = 301$, iar $\overline{abc}_{max} = 997$.

I.2.12. Într-o cutie se află 9 cartonaşe pe care sunt scrise numerele: 10,13,14,19,20,27,30,33,34.