Deducția naturală în logica propozițiilor

Ion Ceapraz Cătălin Stănciulescu

Deducția naturală

în

Logica propozițiilor

EDITURA UNIVERSITARIA
Craiova, 2012

Prefață

Lucrarea de față se adresează tuturor celor interesați în studiul logicii și al teoriei argumentării, dar îndeosebi studenților de la filosofie și de la alte discipline umaniste, care au deja cunoștințe elementare de logică, în special noțiuni de logică propozițională.

Structura cărții este aceea a unei lucrări cu un accentuat caracter aplicativ. Prezentarea, în general într-o formă concisă, dar adesea însoțită de numeroase exemple, a noțiunilor teoretice, este urmată de un număr relativ important de exerciții și aplicații, împreună cu soluțiile lor. Varietatea exercițiilor și aplicațiilor, precum și prezentarea mai multor variante de rezolvare a acestora, au scopul de a-i ajuta pe cei interesați în dezvoltarea capacității de a aplica, uneori chiar cu ingeniozitate, regulile de deducție naturală în evaluarea diferitelor modalități de argumentare din cunoașterea comună și științifică, în particular din filosofie.

Elementele de originalitate ale lucrării nu trec prea mult dincolo de stabilirea criteriilor de selectare, din bibliografia parcursă, a exercițiilor pe care le conține, de maniera de rezolvare a acestora, de adaptarea unor exemple la principiile teoretice enunțate și, în bună parte, de modalitatea de structurare a conținutului său.

În speranța că vor face din parcurgerea lucrării o întreprindere plăcută, lucru nu tocmai ușor de realizat pentru o lucrare de acest gen, concizia și claritatea expunerii, atractivitatea exemplelor prezentate au fost preponderent scopurile urmărite.

Autorii

Introducere

Logica cercetează diferite tipuri de argumente şi, prin diferite metode, încearcă să distingă argumentele valide de argumentele nevalide. Un argument este *valid* dacă este imposibil ca premisele sale să fie (toate) adevărate, iar concluzia sa să fie falsă. Altfel spus, validitatea conservă în concluzie adevărul premiselor.

În logica propozițiilor validitatea unui argument poate fi testată prin *tabelele de adevăr*. Însă metoda tabelelor de adevăr devine practic greoaie atunci când numărul variabilelor propoziționale este mare. Dacă pentru două variabile propoziționale avem patru distribuiri sau combinații ale valorilor de adevăr, pentru 3 avem 8, pentru 4 avem 16, pentru 5 avem 32. Din acest motiv, în locul tabelelor de adevăr, putem folosi *metoda deducției naturale*, un mod de testare a validității argumentelor mai familiar, mai asemănător cu şi mai apropiat atât de formele de argumentare folosite în limbajul cotidian, cât şi de modalitățile de demonstrație din matematică, în particular din geometrie.

În logica propozițiilor tabelele de adevăr sunt folosite pentru a stabili dacă valoarea de adevăr (adevărat, fals) a unei propoziții compuse depinde numai de forma sa sau dacă ea depinde şi de valorile de adevăr ale propozițiilor care o compun. Spunem că o propoziție compusă este *logic adevărată* sau *tautologie* dacă ea este adevărată indiferent de valorile de adevăr ale propozițiilor care o compun. Spunem că este *logic falsă* sau *contradicție logică* dacă ea este falsă indiferent de valorile de adevăr ale propozițiilor care o compun. Altfel spus, o propoziție logic adevărată sau tautologică capătă valoarea (de adevăr) adevărat pentru toate combinațiile valorilor de adevăr ale variabilelor propoziționale. Iar o propoziție logic falsă sau contradictorie capătă valoarea (de adevăr) fals pentru toate combinațiile valorilor de adevăr ale variabilelor propoziționale. Şi spunem că o propoziție este *contingentă* dacă valoarea ei de adevăr variază în funcție de valorile de adevăr ale propozițiilor care o compun. Astfel, pentru unele combinații ale valorilor de adevăr ale variabilelor propoziționale, propoziția compusă capătă valoarea adevărat, iar pentru altele, valoarea fals. Mai riguros, putem spune că există cel puțin o combinație a valorilor de adevăr ale propozițiilor componente pentru care propoziția compusă capătă valoarea adevărat şi cel puțin o combinație a valorilor de adevăr ale propozițiilor componente pentru care propoziția compusă capătă valoarea fals. În acest caz valoarea de adevăr a propoziției compuse “este condiționată” de valorile de adevăr ale propozițiilor care o compun, ale componentelor ei. Uneori este adevărată, alteori este falsă, în funcție de valorile de adevăr ale componentelor ei. În schimb, dacă o propoziție este fie logic adevărată (tautologie), fie logic falsă, valoarea ei de adevăr depinde doar de forma sa şi nu are nimic de-a face cu conținutul ei. Putem decide asupra valorii de adevăr a propozițiilor logic adevărate sau logic false cunoscând *doar* înțelesul (semnificația) termenilor logici care intră în aceste propoziții şi nu înțelesul (semnificația) termenilor extralogici care intră în aceste propoziții în mod neesențial. Iar a înțelege semnificația termenilor logici înseamnă a înțelege structura (logică) a propozițiilor, ordinea (ierarhică) în care rezolvăm operațiile logice. Astfel de propoziții nu ne spun nimic despre lume, nu fac aserțiuni despre cum stau lucrurile în lume. Propoziții ca: *Plouă sau nu plouă*; *Dacă orice om care este căsătorit este fericit, atunci orice om care este nefericit este necăsătorit*; *Dacă oricine care este zemindar este puternic şi Ion este zemindar, atunci el e puternic*; *Dacă orice particulă care este electron are moment magnetic şi particula x nu are moment magnetic, atunci ea nu este electron*; *Brentano este filozof sau Brentano nu este filozof* sunt exemple sau instanțieri de adevăruri logice sau tautologii. Aceste propoziții nu sunt aserțiuni despre lucruri, stări sau evenimente din lume. Ele nu oferă nici o informație factuală despre o realitate extralingvistică. Pentru a decide asupra adevărului lor nu trebuie să fii nici meteorolog, nici sociolog, nici istoric, nici fizician, nici profesor de filozofie. Pentru a decide în mod categoric asupra adevărului lor, trebuie să fii logician, adică să cunoşti doar înțelesul (semnificația) termenilor logici care apar în aceste propoziții sau, altfel spus, să cunoşti *structura formală* a propozițiilor. Iar propoziția *Plouă şi nu plouă* este un exemplu banal de propoziție logic falsă, contradictorie. Ea nu ne oferă nici o informație despre vreme. Însă propoziția: *La munte plouă* este o propoziție contingentă deoarece ea are un conținut factual, ne oferă o informație despre starea vremii.

Distincția între tautologii, contradicții şi propoziții contingente este de o deosebită relevanță pentru rezolvarea multor probleme de filozofie, îndeosebi cele referitoare la modalitățile de *obținere*, *testare*, *justificare* şi *întemeiere* a cunoştiințelor noastre.

Tabelele de adevăr sunt, de asemenea, folosite pentru a constata ce relații logice există între două (sau mai multe) propoziții. Spunem că două propoziții compuse sunt *logic echivalente* dacă au aceeaşi valoare de adevăr pe fiecare linie a tabelului de adevăr. Două propoziții compuse sunt *contradictorii* dacă au valori opuse pe fiecare linie a tabelului de adevăr. Două (sau mai multe) propoziții sunt *consistente* dacă există cel puțin o linie în care amândouă (sau toate, dacă sunt mai multe) sunt adevărate. În fine, două (sau mai multe) propoziții sunt *inconsistente* dacă nu există nici o linie în care ambele (sau toate, dacă sunt mai multe) să fie adevărate.

O pereche de propoziții este fie consistentă, fie inconsistentă. Unele propoziții consistente sunt, de asemenea, echivalente logic şi unele propoziții inconsistente sunt fie contradictorii, fie logic echivalente. Tot ceea ce se cere pentru consistență este existența, în tabelul de adevăr, cel puțin a unei linii în care toate propozițiile să fie adevărate. Tot ceea ce se cere pentru inconsistență este să nu existe nici o astfel de linie în tabelul de adevăr. Prin urmare, o mulțime (o conjuncție) de propoziții este consistentă dacă există cel puțin un caz (o linie) a tabelului de adevăr în care toate propozițiile acestei mulțimi sunt adevărate. Și o mulțime (conjuncție) de propoziții este inconsistentă când nu există nici un caz (nici o linie a tabelului de adevăr) în care toate propozițiile acestei mulțimi să fie adevărate.

Consistența (sau inconsistența) unei mulțimi de propoziții are o semnificație majoră pentru a aprecia caracterul rațional al argumentării unei persoane. Dacă propozițiile care exprimă o astfel de argumentare sunt consistente (între ele), atunci există cel puțin o posibilitate (un caz) în care argumentarea este rațională, inteligibilă, în care argumentarea are sens sau înțeles. Adică există o linie (în tabelul de adevăr), cel puțin un caz în care toate propozițiile acelei persoanei sunt adevărate. Pe de altă parte, dacă propozițiile sunt inconsistente atunci nu există nici o posibilitate (caz) în care poziția persoanei respective să fie rațională, inteligibilă, să fie înțeleasă, sau să aibă sens. În acest caz, nu există nici o linie în tabelul de adevăr în care toate propozițiile să fie adevărate. Mulțimea (conjuncția) respectivă de propoziții este logic contradictorie sau inconsistentă. Vom constata ulterior ce legătură există între conceptele de consistență și inconsistență, pe de o parte, și metoda deducției naturale, pe de altă parte.

Există o strânsă relație între tautologii (adevăruri logice) și formele argumentative valide. Fiecărei forme argumentative deductiv valide îi corespunde o formă propozițională tautologică implicațională (sau condițională), formă al cărei *antecedent* reprezintă mulțimea de premise, și al cărei *consecvent* este concluzia acelei forme argumentative. Altfel spus, o formă argumentativă validă poate fi transpusă în logica propozițiilor sub forma unei implicații (propoziții condiționale, de forma $p \rightarrow q$, unde p este antecedentul, iar q este consecventul) *care este tautologie*, implicație al cărei antecedent, care se prezintă sub forma unei conjuncții (de forma p&q&…), reprezintă premisele acestei forme argumentative, și al cărei consecvent reprezintă concluzia ei.

Încă o dată subliniem că valorile de adevăr ale tuturor tautologiilor și contradicțiilor sunt stabilite exclusiv de logică, fără a apela la nici un test empiric, ceea ce nu este valabil în cazul propozițiilor contingente.

Un argument constă din una sau mai multe propoziții numite premise care justifică o altă propoziție, numită concluzie. O formă argumentativă este o mulțime de variabile propoziționale astfel încât toate instanțele ei de substituție sunt argumente. Deci o formă argumentativă poate fi transcrisă sub forma unei implicații. Dacă implicația *este tautologică*, atunci forma argumentativă este validă.

Fie forma argumentativă numită *modus ponens*:

$$\begin{array}{ll} p \rightarrow q & \\ p & / \ q \end{array}$$

Această formă argumentativă poate fi transcrisă în logica propozițiilor astfel:

$$((p \rightarrow q) \& p) \rightarrow q$$

Să facem tabelul de adevăr al acestei formule, al cărei conector principal este implicația.

p	q	p→q	(p→q)&p	((p→q)&p)→q
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Unde:

1 = valoarea de adevăr *adevărat*

0 = valoarea de adevăr *fals*

→ = simbolul pentru conectorul propozițional *implicație*, al cărui tabel de adevăr este:

p	q	p→q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

& = simbolul pentru conectorul propozițional *conjuncție*, al cărui tabel de adevăr este:

p	q	p&q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Constatăm că formula este tautologică. Prin urmare, forma argumentativă de mai sus (*modus ponens*) este validă. Validitatea acestei forme de argumentare poate fi demonstrată și în felul următor (unii logicieni numesc acest procedeu *metoda semantică*):

			Prima premisă	**A doua premisă**	**Concluzia**
	p	**q**	**p→q**	**p**	**q**
1	1	1	1	1	1
2	1	0	0	1	0
3	0	1	1	0	1
4	0	0	1	0	0

O formă argumentativă validă este o formă argumentativă pentru care este imposibil ca toate premisele sale să fie adevărate, iar concluzia să fie falsă. Altfel spus, dacă premisele unei forme argumentative valide sunt adevărate, atunci concluzia sa va fi în mod necesar adevărată. În cazul de față, nu există nici o distribuție a valorilor de adevăr ale premiselor și concluziei astfel încât premisele să fie adevărate, iar concluzia să fie falsă. Singura distribuție a valorilor de adevăr în care premisele sunt adevărate (linia 1) conține și adevărul concluziei. Prin urmare, această formă argumentativă este validă.

Forma argumentativă analizată poate fi *instanțiată* prin diferite argumente concrete. Un astfel de argument este următorul:

Dacă frunzele încep să cadă, atunci vine toamna
Frunzele cad / Prin urmare, *vine toamna*

Dacă simbolizăm propoziția *Frunzele încep să cadă* prin F, și propoziția *Vine toamna* prin T, atunci argumentul nostru va avea forma:

$$F \to T$$
$$F \qquad / T$$

Aici am *substituit* variabila propozițională p prin propoziția F și variabila propozițională q prin propoziția T. Este necesar să subliniem că nu este suficient să afirmăm că un argument este valid atunci când toate premisele sunt adevărate, iar concluzia adevărată. Trebuie să spunem în plus că, din *structura formală* a premiselor, dacă acestea sunt adevărate, rezultă cu necesitate adevărul concluziei. Și această situație poate fi demonstrată dacă implicația este o tautologie, un adevăr logic.

Argumentul

Cerul este albastru și *iarba este verde*;
prin urmare, *iarba este verde*,

este un argument valid. În schimb, argumentul

Cerul este albastru sau *iarba este verde*;
prin urmare, *iarba este verde*

nu este valid.

Primul argument are forma unei implicații care este tautologie. Fie C pentru *Cerul este albastru* și V pentru *Iarba este verde*. Transpus în logica propozițiilor, argumentul are forma:

$$(C\&V) \to V$$

Tabelul de adevăr al acestei formule ne arată că ea este o tautologie:

C	**V**	**C&V**	**(C&V) → V**
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Astfel, argumentul poate fi transcris sub forma unei implicații care este o *tautologie*. Analizând argumentul prin metoda semantică, constatăm că atunci când toate premisele sunt adevărate (linia 1; aici vom considera că avem o singură premisă, aceea reprezentată de conjuncția C&V, pentru a putea compara mai ușor cele două exemple), concluzia este, de asemenea, adevărată:

			Premisa	**Concluzia**
	C	**V**	**C&V**	**V**
1	1	1	1	1
2	1	0	0	0
3	0	1	0	1
4	0	0	0	0

Transcris în logica propozițiilor, argumentul

Cerul este albastru sau *iarba este verde*;
prin urmare, *iarba este verde*

are următoarea formă:

$$(C \lor V) \rightarrow V$$

al cărei tabel de adevăr este:

C	**V**	**C v V**	**(C v V) → V**
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	1
0	0	0	1

Din tabel (ultima coloană) rezultă că această implicație *nu* este tautologie, ci doar o formulă *contingentă*, deci forma argumentativă analizată nu este validă. La același rezultat ajungem și prin metoda semantică.

			Premisa	**Concluzia**
	C	**V**	**C v V**	**V**
1	1	1	1	1
2	1	0	1	0
3	0	1	1	1
4	0	0	0	1

Linia 2 ne arată că premisa este adevărată, iar concluzia este falsă. Ceea ce înseamnă că forma argumentativă analizată nu este validă.

O demonstrație prin care o concluzie poate fi dedusă dintr-o mulțime de premise se numește *demonstrație formală*. O demonstrație formală a validității unui argument presupune o serie de propoziții în care fiecare din aceste propoziții este fie o premisă, fie o propoziție care rezultă din propozițiile anterioare printr-o *formă argumentativă validă elementară*. Ultima propoziție a seriei este concluzia argumentului.

Forme argumentative valide implicaționale. Reguli de inferență

(1) *Modus ponens* (**MP**), analizat mai sus,

$$\begin{array}{ll} p\rightarrow q & \\ p & /\ q \end{array}$$

este o formă argumentativă elementară. Atunci când, într-o demonstrație, justificăm pașii parcurși, formele argumentative valide elementare sunt numite *reguli de inferență*.

(2) O altă formă argumentativă elementară este *modus tollens* (**MT**):

$$\begin{array}{ll} p\rightarrow q & \\ \sim q & /\ \sim p \end{array}$$

Transcris în logica propozițiilor, *modus tollens* are forma:

$$((p\rightarrow q)\&\ \sim q)\rightarrow\ \sim p$$

care, așa cum reiese din tabel, este o tautologie:

p	**q**	**~p**	**~q**	**p→q**	**(p→q)& ~q**	**((p→q)& ~q)→ ~p**
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

De asemenea, forma argumentativă este validă deoarece, în linia în care toate premisele sunt adevărate (linia 4), concluzia este adevărată:

			Premisa 1	**Premisa 2**	**Concluzia**
	p	**q**	**p→q**	**~q**	**~p**
1	1	1	1	0	0
2	1	0	0	1	0
3	0	1	1	0	1
4	0	0	1	1	1

Folosind aceste două reguli de inferență, și anume *modus ponens și modus tollens*, putem observa în ce constă *metoda deducției naturale*. Să demonstrăm prin metoda deducției naturale, aplicând cele două reguli de inferență, că următorul argument este valid:

(1) *Dacă principiul simplității poate fi folosit pentru a decide între teorii științifice opuse, atunci teoria heliocentrică este corectă, iar teoria geocentrică este incorectă*
(2) *Argumentele lui Copernic sunt valabile dacă teoria heliocentrică este corectă și teoria geocentrică este incorectă*
(3) *Argumentele lui Copernic sunt valabile numai dacă argumentele lui Ptolomeu sunt nevalabile*
(4) *Dacă epiciclurile sunt necesare, atunci argumentele lui Ptolemeu nu sunt nevalabile*
(5) *Epiciclurile sunt necesare*
(6) Prin urmare, *principiul simplității nu poate fi folosit pentru a decide între teorii științifice opuse.*

În primul rând, vom introduce simboluri pentru propoziții:

S = *Principiul simplității poate fi folosit pentru a decide între teorii științifice opuse*
H = *Teoria heliocentrică este corectă*
G = *Teoria geocentrică este corectă*
C = *Argumentele lui Copernic sunt valabile*
P = *Argumentele lui Ptolomeu sunt valabile*
E = *Epiciclurile sunt necesare*

Transcrierea argumentului în limbajul logicii propozițiilor va avea următoarea formă:

(1)	S→(H&~G)	
(2)	(H&~G)→C	
(3)	C→ ~P	
(4)	E→ ~~P	
(5)	E	/ ~S
(6)	~~P	4, 5 MP
(7)	~C	3, 6 MT
(8)	~(H& ~G)	2, 7 MT
(9)	~S	1, 8 MT

În legătură cu transcrierea din limbajul natural în logica propozițiilor, trebuie să precizăm că: a) propoziția care urmează după expresia "dacă" este totdeauna antecedent (cazul propoziției (2), în exemplul nostru), b) iar propoziția care urmează după expresia "numai dacă" este totdeauna consecvent (cazul propoziției (3), în exemplul nostru).

Primele cinci propoziții reprezintă premisele argumentului. În dreapta premisei (5), care este ultima premisă inițială, este trecută concluzia argumentului. Sub premise am tras o line orizontală pentru a separa propozițiile care reprezintă premisele inițiale, de celelalte propoziții pe care le obținem, prin *derivare deductivă*, din premisele inițiale și din noile propoziții, care pot fi considerate concluzii intermediare. Numerele din dreapta unei linii ne arată liniile din care am obținut acea linie, iar simbolurile care apar după aceste numere ne indică regulile de inferență folosite în derivare.

Linia (6) am obținut-o aplicând *modus ponens* la premisele (4) și (5). Linia (7) am obținut-o aplicând regula *modus tollens* la linia (3) (o premisă inițială) și la linia (6), nou obținută. Linia (8) am obținut-o dintr-o premisă inițială (linia (2)) și linia (7), aplicând *modus tollens*. În fine, linia (9), adică concluzia, am obținut-o dintr-o premisă inițială (linia (1)) și linia (8).

(3) Altă formă argumentativă validă elementară este *silogismul ipotetic* (**SI**):

$$\begin{array}{ll} p\to q & \\ q\to r & /\ p\to r \end{array}$$

Transcris în logica propozițiilor, silogismul ipotetic va avea forma:

$$((p\to q)\&(q\to r))\to(p\to r),$$

iar tabelul său de adevăr este:

p	**q**	**r**	**p→q**	**q→r**	**(p→q)&(q→r)**	**p→r**	**→**[1]
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Această implicație este o *tautologie*. Prin urmare, silogismul ipotetic este o formă argumentativă validă. Acest lucru poate fi probat și prin metoda semantică:

				Prima premisă	**A doua premisă**	**Concluzia**
	p	**q**	**r**	**p→q**	**q→r**	**p→r**
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	0	1	0	0
3	1	0	1	0	1	1
4	1	0	0	0	1	0
5	0	1	1	1	1	1
6	0	1	0	1	0	1
7	0	0	1	1	1	1
8	0	0	0	1	1	1

[1] ”→” reprezintă aici întreaga expresie ((p→q)&(q→r))→(p→r), al cărei operator principal este implicația.

Acestă formă argumentativă este validă deoarece pe liniile unde toate premisele sunt adevărate (aici liniile (1), (5), (7), (8)) concluzia este adevărată.

Fie acum următorul argument:

(1) *Dacă punctul de vedere al lui Skinner din lucrarea "Dincolo de libertate și demnitate" este valabil, atunci dacă noi dorim să evităm efectele previzibile, trebuie să cercetăm atent factorii care duc la aceste efecte*
(2) *Dacă explicațiile deterministe și teleologice sunt incompatibile, atunci punctul de vedere al lui Skinner este valabil*
(3) *Însă dacă punctul de vedere al lui Skinner se bazează pe presupoziții confuze despre natura umană, atunci nu este adevărat că, dacă dorim să evităm rezultatele previzibile, atunci trebuie să anticipăm cu grijă factorii care duc la aceste efecte*
(4) *Punctul de vedere al lui Skinner se bazează pe presupoziții confuze despre natura umană*
(5) Prin urmare*, explicațiile deterministe și explicațiile teleologice nu sunt incompatibile.*

Propozițiile din componența acestui argument pot fi simbolizate în felul următor:

S = *Punctul de vedere al lui Skinner din lucrarea "Dincolo de libertate și demnitate" este valabil*
D = *Noi dorim să evităm efectele previzibile*
C = *Noi trebuie să cercetăm atent factorii care duc la aceste efecte*
I = *Explicațiile deterministe și teleologice sunt incompatibile*
P = *Punctul de vedere al lui Skinner se bazează pe presupoziții confuze despre natura umană*

Iar argumentul va avea următoarea formă:

(1)	$S \to (D \to C)$	
(2)	$I \to S$	
(3)	$P \to \sim(D \to C)$	
(4)	P	/ $\sim I$
(5)	$I \to (D \to C)$	1, 2 SI
(6)	$\sim(D \to C)$	3, 4 MP
(7)	$\sim I$	5, 6 MT

Astfel, folosind cele trei reguli de inferență pe care le-am introdus până acum, am demonstrat că acest argument este valid.

(4) *Silogismul disjunctiv* (**SD**) este o altă formă argumentativă elementară, care poate fi scrisă astfel:

$p \vee q$		sau	$p \vee q$	
$\sim p$	/ q		$\sim q$	/ p

În logica propozițiilor **SD** se poate scrie:

$$((p \vee q) \,\&\, \sim p) \rightarrow q \quad \text{sau} \quad ((p \vee q) \,\&\, \sim q) \rightarrow p$$

Tabelele de adevăr corespunzătoare sunt:

p	**q**	**~p**	**p v q**	**&**[2]	**→**[3]
1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1

respectiv,

p	**q**	**~q**	**p v q**	**&**[4]	**→**[5]
1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1

Valorile de adevăr din ultima coloană a tabelelor ne arată că formulele sunt tautologii, și, prin urmare, că silogismul disjunctiv este valid. Ceea ce poate fi confirmat de metoda semantică:

		Premisa 1	**Premisa 2**	**Concluzia**
p	**q**	**p v q**	**~p**	**q**
1	1	1	0	1
1	0	1	0	0
0	1	1	1	1
0	0	0	1	1

		Premisa 1	**Premisa 2**	**Concluzia**
p	**q**	**p v q**	**~q**	**p**
1	1	1	0	1
1	0	1	1	1
0	1	1	0	0
0	0	0	1	0

2 ”&” este folosit aici pentru expresia (p v q) & ~p.
3 ((p v q) & ~p)→q
4 ”&” este folosit aici pentru expresia (p v q) & ~q.
5 ((p v q) & ~q)→p

Într-adevăr, se observă că pe liniile în care ambele premise sunt adevărate, concluzia este, de asemenea, adevărată.

Fie acum următorul argument, a cărui validitate urmează să o demonstrăm folosind şi **SD**:

(1) *Fie relatările despre OZN-uri conduse de marțieni trebuie să fie crezute numai dacă există observatori ştiințifici calificați, fie dacă un număr mare de oameni sunt convinşi că ei au văzut marțieni, atunci trebuie să conchidem că există marțieni*
(2) *Nu este adevărat că, dacă un număr mare de oameni sunt convinşi că ei au văzut marțieni, atunci trebuie să conchidem că există marțieni*
(3) *Există marțieni numai dacă pe planeta Marte pot exista condiții de viață şi marțienii au capacitatea tehnică de a realiza călătorii interplanetare*
(4) *Sau toate datele empirice pe care le avem despre Marte sunt eronate, sau este fals atât că pe Marte există condiții de viață, cât şi că ființele de pe această planetă au capacitatea tehnică de a realiza călătorii interplanetare*
(5) *Nu este adevărat că toate datele empirice pe care le avem despre Marte sunt eronate*
(6) *Fie există marțieni, fie nu există observatori ştiințifici calificați*
(7) Prin urmare*, nu ar trebui să credem relatările despre OZN-uri conduse de marțieni.*

Să simbolizăm propozițiile pe care acest argument le conține:

P = *Relatările despre OZN-uri conduse de marțieni trebuie să fie crezute*
C = *Există observatori ştiințifici calificați*
O = *Un număr mare de oameni sunt convinşi că au văzut marțieni*
N = *Trebuie să conchidem că există marțieni*
M = *Există marțieni*
V = *Pe planeta Marte există viață*
T = *Marțienii au capacitatea tehnică de a realiza călătorii interplanetare*
D = *Datele empirice pe care le avem despre Marte sunt eronate*

Argumentul poate fi transcris în felul următor:

(1)	(P→C) v (O→N)	
(2)	~(O→N)	
(3)	M→(V&T)	
(4)	D v ~(V&T)	
(5)	~D	
(6)	M v ~C	/ ~P
(7)	P→C	1, 2 SD
(8)	~(V v T)	4, 5 SD
(9)	~M	3, 8 MT
(10)	~C	6, 9 SD
(11)	~P	7, 10 MT

Fiecare linie a fost obținută din premisele inițiale, prin aplicarea regulilor de inferență cunoscute – **SD** la liniile (1) şi (2) pentru a obține linia (7), tot **SD** la liniile (4) şi (5) pentru a obține linia (8), **MT** la liniile (3) şi (8) pentru a obține linia (9), **SD** la liniile (6) şi (9) pentru a obține linia (10) şi **MT** la (7) şi (10) pentru a obține linia (11). Astfel, ~P, concluzia argumentului, a fost obținută în mod valid.

Exerciții

1. Folosiți *modus ponens* (**MP**), *modus tollens* (**MT**), *silogismul disjunctiv* (**SD**) şi *silogismul ipotetic* (**SI**), pentru a deriva concluziile următoarelor agumente (Hurley) :

a) (1) (D&E) v (B→P)
(2) ~(D&E) / B→P

b) (1) (K&O)→(N v T)
(2) K&O / N v T

c) (1) (M v P)→~K
(2) D→(M v P) / D→~K

d) (1) ~~(R v W)
(2) S→~(R v W) / ~S

e) (1) F v (D→T)
(2) ~F
(3) D / T

f) (1) (K&B) v (L→E)
(2) ~(K&B)
(3) ~E / ~L

g) (1) P→(G→T)
(2) Q→(T→E)
(3) P
(4) Q / G→E

h) (1) ~W→(~W→(X→W))
(2) ~W / ~X

i) (1) ~S→D
(2) ~S v (~D→K)

(3) ~D / K

j) (1) A→(E→~F)
(2) H v (~F→M)
(3) A
(4) ~H / E→M

k) (1) N→(J→P)
(2) (J→P)→(N→J)
(3) N / P

l) (1) G→(~O→(G→D))
(2) O v G
(3) ~O / D

m) (1) ~M v (B v ~T)
(2) B→W
(3) ~~M
(4) ~W / ~T

n) (1) (L ≡ N)→C
(2) (L ≡ N) v (P→~E)
(3) ~E→C
(4) ~C / ~P

o) (1) ~J→(~A→(D→A))
(2) J v ~A
(3) ~J / ~D

p) (1) (B→~M)→(T→~S)
(2) B→K
(3) K→~M
(4) ~S→N / T→N

r) (1) (R→F)→((R→~G)→(S→Q))
(2) (Q→F)→(R→Q)
(3) ~G→F
(4) Q→~G / S→F

s) (1) ~A→(A v (T→R))
(2) ~R→(R v (A→R))
(3) (T v D)→~R
(4) T v D / D

t) (1) ~N→((B→D)→(N v ~E))
(2) (B→E)→~N
(3) B→D
(4) D→E /~ D

Soluții

Exercițiul 1:

a) (1) (D&E) v (B→P)
(2) ~(D&E) / B→P
(3) B→P 1, 2 SD

b) (1) (K&O)→(N v T)
(2) K&O / N v T
(3) N v T 1, 2 MP

c) (1) (M v P)→~K
(2) D→(M v P) / D→~K
(3) D→~K 1, 2 SI

d) (1) ~~(R v W)
(2) S→~(R v W) / ~S
(3) ~S 1, 2 MT

e) (1) F v (D→T)
(2) ~F
(3) D / T
(4) D→T 1, 2 SD
(5) T 3, 4 MP

f) (1) (K&B) v (L→E)
(2) ~(K&B)
(3) ~E / ~L
(4) L→E 1, 2 SD
(5) ~L 3, 4 MT

g) (1) P→(G→T)
(2) Q→(T→E)
(3) P
(4) Q / G→E
(5) G→T 1, 3 MP
(6) T→E 2, 4 MP
(7) G→E 5, 6 SI

h)	(1) ~W→(~W→(X→W))	
	(2) ~W	/ ~X
	(3) ~W→(X→W)	1, 2 MP
	(4) X→W	2, 3 MP
	(5) ~X	2, 4 MT

i)	(1) ~S→D	
	(2) ~S v (~D→K)	
	(3) ~D	/ K
	(4) ~~S	1, 3 MT
	(5) ~D→K	2, 4 SD
	(6) K	3, 5 MP

j)	(1) A→(E→~F)	
	(2) H v (~F→M)	
	(3) A	
	(4) ~H	/ E→M
	(5) E→~F	1, 3 MP
	(6) ~F→M	2, 4 SD
	(7) E→M	5, 6 SI

k)	(1) N→(J→P)	
	(2) (J→P)→(N→J)	
	(3) N	/ P
	(4) J→P	1, 3 MP
	(5) N→J	2, 4 MP
	(6) N→P	4, 5 SI
	(7) P	3, 6 MP

l)	(1) G→(~O→(G→D))	
	(2) O v G	
	(3) ~O	/ D
	(4) G	2, 3 SD
	(5) ~O→(G→D)	1, 4 MP
	(6) G→D	3, 5 MP
	(7) D	4, 6 MP

m)	(1) ~M v (B v ~T)	
	(2) B→W	
	(3) ~~M	
	(4) ~W	/ ~T
	(5) B v ~T	1, 3 SD
	(6) ~B	2, 4 MT
	(7) ~T	5, 6 SD