Dumitru BĂLĂ

METODE CANTITATIVE

Dumitru BĂLĂ

METODE CANTITATIVE

EDITURA UNIVERSITARIA
Craiova, 2015

Referenţi ştiinţifici:
Conf. univ. dr. Dalia Mirela SIMION
Universitatea din Craiova
Conf. univ. dr. Daniel TOBĂ
Universitatea din Craiova

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
BĂLĂ, DUMITRU
Metode cantitative / Dumitru Bălă. - Craiova : Universitaria, 2015
Bibliogr.
ISBN 978-606-14-0898-6

51

PREFAŢĂ

Lucrarea de faţă se adresează în primul rând studenţilor de la facultăţile cu profil economic şi cuprinde programa analitică la disciplina „Matematici aplicate în economie”, "Metode cantitative în studiul pieţei", "Metode cantitative în gestiunea afacerilor" prevăzută în planul de învăţământ. Plecând de la ideea că un curs scris nu trebuie să-l înlocuiască pe cel oral (predat în faţa studenţilor), în text nu au fost introduse comentarii dense, urmând ca acestea să fie prezentate în funcţie de nivelul studenţilor.

Precizez că definiţiile, unele teoreme (enunţul şi demonstraţia) au fost preluate din literatura de specialitate fără modificări întrucât sunt cunoscute (Exemple: Teorema lui Rolle, Teorema lui Fermat, notaţiile lui Monge ş.a.m.d.).

De asemenea precizez că am prezentat şi exemple din literatura de specialitate, în care expresiile sunt simetrice, rezultatele simple şi au fost preferate în locul unor exemple proprii, punând pe primul plan aspecte de ordin metodic. Elementele de originalitate se găsesc în studiul stabilităţii sistemelor dinamice, rezultatele realizându-se şi pe baza derulării contractului de cercetare 3C/27.01.2014. Lucrarea propune teme utile atât economiştilor, inginerilor, geografilor cât şi profesorilor. Ea poate servi nu numai la pregătirea examenului de matematică, ci şi ca sursă de informare după promovarea acestuia.

Cu speranţa că lucrarea se va dovedi utilă, autorul aşteaptă cu interes din partea cititorilor orice observaţii şi sugestii pertinente.

Dumitru Bălă
Drobeta Turnu – Severin

Capitolul I

Puncte de extrem ale funcţiilor reale definite pe o submulţime a lui R

Definiţia 1.1. Fixăm o funcţie f: $A \subset R \rightarrow R$. Un punct $x_0 \in A$ se numeşte *punct de maxim relativ* (respectiv de *minim relativ*) al lui f dacă există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încât pentru orice $x \in U \cap A$, să avem:

$f(x) \leq f(x_0)$ (respectiv $f(x) \geq f(x_0)$)

$f(x_0)$ se numeşte maxim (respectiv minim) relativ al lui f.

Observaţii:

1) Punctele de maxim sau de minim relativ se numesc puncte de extrem relativ.

2) Dacă inegalităţile $f(x) \leq f(x_0)$ (respectiv $f(x) \geq f(x_0)$) sunt stricte pentru orice $x \in U \cap A$, $x \neq x_0$, se spune că x_0 este un punct de extrem strict.

Definiţia 1.2. Valorile funcţiei în punctele ei de extrem relativ se numesc *extreme relative* ale funcţiei.

Observaţii:

1) Faptul că funcţia considerată este cu valori reale este esenţial (folosindu-se relaţia de ordine ≤ pe R).

2) O funcţie poate să aibă mai multe puncte de maxim și minim relativ.

3) Un minim relativ poate să fie mai mare decât un maxim relativ ceea ce justifică adjectivul „relativ”.

4) Valorile $\sup_{x \in A} f(x)$, $\inf_{x \in A} f(x)$ calculate în R se mai numesc extreme globale ale lui f pe A.

5) Punctele de extrem relativ se mai numesc puncte de extrem local, deoarece inegalităţile de tipul $f(x) \leq f(x_0)$ (respectiv $f(x) \geq f(x_0)$) sunt verificate nu neapărat pe întreg domeniul de definiţie al funcţiei f ci numai în jurul lui x_0.

6) Dacă marginea $M = \sup\limits_{x \in A} f(x)$ este atinsă, atunci orice punct x astfel încât $f(x_0) = M$ va fi un punct de maxim (nu neapărat strict).

7) Se poate întâmpla ca x_0 să fie un punct de maxim şi totuşi $f(x_0) < M$.

8) Dacă marginea superioară sup f(x) nu este atinsă pe mulţimea A, atunci se poate ca funcţia să nu aibă puncte de maxim.

Teorema lui P. Fermat. Fie $x_0 \in I$ un interval deschis şi x_0 un punct de extrem (relativ) al unei funcţii $f: I \to R$. Dacă f este derivabilă în punctul x_0, atunci $f'(x_0)=0$.

Demonstraţia în [22] la pagina 152.

Observaţii:

1) Dacă I nu ar fi fost interval deschis, de exemplu $I=[a,b]$ şi $x_0=a$ (sau $x_0=b$), atunci teorema nu ar fi fost adevărată pentru că f(x) nu ar fi fost definită pentru $x < a$, respectiv pentru $x > b$.

2) Reciproca teoremei lui Fermat este în general falsă. Demonstraţia se face dând un contraexemplu:

$f(x)=x^3$; $f'(x)=3x^2$; $f'(0)=0$ nu rezultă $x_0=0$ punct de extrem local pentru că f este strict crescătoare.

3) Teorema lui Fermat dă condiţii necesare de extrem, dar nu şi suficiente.

4) Interpretarea geometrică a teoremei lui Fermat.

În condiţiile enunţului, într-un punct de extrem, tangenta la grafic este paralelă cu axa Ox.

5) Dacă $f: I \to R$ este o funcţie derivabilă pe un interval deschis I, atunci zerourile derivatei f pe I sunt numite şi puncte critice ale lui f pe I.

6) Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem local sunt printre punctele critice.

Teorema lui M. Rolle. Fie $f:[a,b]\to R$, $a<b$ o funcţie Rolle astfel încât $f(a)=f(b)$, atunci există cel puţin un punct $c\in(a,b)$ astfel încât $f'(c)=0$.

Definiţia 1.3. O funcţie $f:[a,b]\to R(a<b)$ se numeşte funcţie Rolle dacă este continuă pe intervalul deschis (a,b).

Corolar 1.1. Între două zerouri ale unei funcţii derivabile pe un interval se află cel puţin un zero al derivatei.

Teorema lui Darboux. Dacă $f:I\to R$ este o funcţie derivabilă pe un interval I, atunci derivata sa f' are proprietatea lui Darboux adică nu poate trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare.

Corolar 1.2. Fie $f:I\to R$ o funcţie derivabilă pe un interval I. Dacă derivata f' nu se anulează pe I, atunci f' are semn constant pe I.

Teorema 1.1. Fie f o funcţie derivabilă de n ori, $n\geq 2$, într-un punct $a\in I$, astfel încât:

$$f'(a)=0,\ f''(a)=0,\ldots,f^{(n-1)}(a) = 0,\ f^{(n)}(a) \neq 0.$$

1) Dacă n este par, atunci a este punct de extrem al lui f; dacă $f^{(n)}(a)<0$ atunci a este punct de maxim, iar dacă $f^{(n)}(a)>0$, atunci a este un punct de minim.

2) Dacă n este impar, iar a este punct interior al intervalului I, atunci a nu este punct de extrem al funcţiei f.

Demonstraţie. Deoarece primele n–1 derivate se anulează în a, formula lui Taylor, de ordinul n, în punctul a, se scrie, pentru $x\in I$:

$$f(x) = f(a)+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}\alpha(x),$$

unde:

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0 \quad \text{şi} \quad \alpha(a)=0,$$

atunci,

$$f(x)-f(a)=\frac{(x-a)^n}{n!}\,[f^{(n)}(a)+\alpha(x)].$$

Deoarece $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, avem:

$$\lim_{x\to a}\alpha\,[f^{(n)}(a)+\alpha(x)]=f^{(n)}(a).$$

Dacă $f^{(n)}(a)<0$, există o vecinătate V a lui a astfel ca:
$f^{(n)}(a)+\alpha(x)<0$, pentru $x\in V$.
Dacă n este par, avem $(x-a)^n\geq 0$, pentru orice $x\in I$, deci:
Dacă $f^{(n)}(a)>0$, atunci $f^{(n)}(a)+\alpha(x)>0$ pentru orice $x\in V$, de unde rezultă că:

$$f(x)-f(a)\leq 0 \ \text{ sau } \ f(x)\geq f(a), \ \text{ pentru } x\in V,$$

adică a este un punct de minim.
Dacă $f^{(n)}(a)<0$ atunci $f^{(n)}(a)+\alpha(x)<0$ pentru $x\in V$, de unde rezultă că $f(x)-f(a)\leq 0$ sau $f(x)<f(a)$ pentru $x\in V$, adică a este un punct de maxim.
Să considerăm acum cazul când a este un punct interior al intervalului I, iar n este impar.
Atunci $(x-a)^n<0$ dacă $x<a$ şi $(x-a)^n>0$ dacă $x>a$, deci:
dacă $f^{(n)}(a)>0$, atunci $f^{(n)}(a)+\alpha(x)>0$, pentru $x\in V$, de unde rezultă că:

$$f(x)-f(a)<0 \ \text{ adică } \ f(x)<f(a), \ \text{ dacă } \ x<a,\ x\in V,$$
$$f(x)-f(a)>0 \ \text{ adică } \ f(x)>f(a), \ \text{ dacă } \ x>a,\ x\in V$$

şi deci a nu este un punct extrem;
dacă $f^{(n)}(a)<0$ atunci:

$$f(x)>f(a), \ \text{ dacă } x<a,\ x\in V,$$
$$f(x)<f(a), \ \text{ dacă } x>a,\ x\in V$$

şi deci nici în acest caz a nu este punct extrem.

Observaţie:

Deoarece $f''(a)$ există, rezultă că f' există într-o întreagă vecinătate a lui a. Dacă n este par, iar a este punct interior al intervalului I, atunci derivata f' are semne diferite de o parte şi de alta a lui a. Într-adevăr, dacă ar avea acelaşi semn într-o vecinătate a lui a, atunci f ar fi strict monotonă în această vecinătate şi deci a n-ar mai fi punct extrem al lui f.

Corolarul 1.3. Fie f o funcţie derivabilă de două ori în punctul $a \in I$, astfel încât $f'(a)=0$ şi $f''(a) \neq 0$.

Dacă $f''(a)<0$, atunci a este *punct de maxim*.

Dacă $f''(a)>0$, atunci a este *punct de minim*.

Corolarul următor stabileşte o proprietate reciprocă:

Corolarul 1.4. Dacă f este derivabilă de două ori într-un punct interior $a \in I$ şi dacă f are în a un minim, atunci $f''(a) \geq 0$, iar dacă f are în a un maxim atunci $f''(a) \leq 0$.

Să presupunem că a este un punct de minim, deci $f'(a)=0$. Dacă am avea $f''(a)<0$, atunci din corolarul precedent ar rezulta că a este un punct de maxim şi am ajunge la o contradicţie. Aşadar $f''(a) \geq 0$.

La fel se demonstrează că dacă a este un punct de maxim, atunci $f''(a) \leq 0$.

Corolarul 1.5. Dacă f este derivabilă de trei ori în punctul interior $a \in I$ şi dacă $f'(a)=0$, $f''(a)=0$, $f'''(a) \neq 0$, atunci a nu este punct de extrem al funcţiei f.

Observaţie:

În cazul când n este impar, tangenta la grafic în punctul (a, f(a)) este paralelă cu axa Ox şi traversează graficul. Un asemenea punct, în care tangenta traversează graficul se numeşte punct de inflexiune.

Capitolul II

Funcţii reale de mai multe variabile reale

Se ştie că R^n este mulţimea sistemelor ordonate de n numere reale, adică:

$$R^n = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \mid x_i \in R;\ i = 1,2\ldots,n \right\}$$

Produsul scalar

V este K spaţiu vectorial.

Definiţia 2.1. *Se numeşte produs scalar pe V o aplicaţie $\varphi: V\text{x}V \to K$ care satisface următoarele axiome:*

1) $\varphi(v,w) = \varphi(w,v) \qquad \forall\, v,w \in V$

2) $\varphi(\alpha v,w) = \alpha\varphi(v,w) \qquad \forall\ \alpha \in K,\ \forall v,w \in V$

3) $\varphi(u,v+w) = \varphi(u,v) + \varphi(u,w) \quad \forall\, u,v,w \in V$

Dacă în plus $\varphi(v,w)=0$, $\forall w \in V \Rightarrow v = 0$, atunci produsul se numeşte nedegenerat.

Notăm: $\varphi = <\,,\,>$ sau $\varphi(v,w) = < v,w >$ sau $\varphi(v,w) = v \cdot w$

Exemplul 2.1.

$V = K^n \quad <\ ,\ > \,:\, V \text{ x } V \to K$

$$< x , y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad < x , y > \in K$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V$$
$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V$$