Marius Marinel STĂNESCU **Dumitru BOLCU**

Analiză spectrală pentru o clasă de operatori integro-diferenţiali

Marius Marinel STĂNESCU Dumitru BOLCU

Analiză spectrală pentru o clasă de operatori integro-diferenţiali

EDITURA UNIVERSITARIA
Craiova, 2014

Referenți științifici:

Prof.univ.dr. Nicolae Dumitru – Universitatea din Craiova
Associate prof. Igor Cialenco – Illinois Institute of Technology

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
STĂNESCU, MARIUS MARINEL
Analiză spectrală pentru o clasă de operatori integro-diferenţiali / Marius Marinel Stănescu, Dumitru Bolcu. - Craiova : Universitaria, 2014
Bibliogr.
ISBN 978-606-14-0839-9
I. Bolcu, Dumitru
51

Prefaţă

Examinarea din punct de vedere ştiinţific a unor clase foarte largi de fenomene fizice şi mecanice se face de regulă cu ajutorul unor modele matematice, care sunt date sub forma unor ecuaţii operatoriale. Studiul existenţei soluţiei pentru aceste ecuaţii (eventual a unicităţii acesteia), a stabilităţii ei în anumite condiţii, constituie provocări matematice nu tocmai uşor de îndeplinit.

În această lucrare ne propunem să analizăm un tip de ecuaţii operatoriale create cu ajutorul unei clase de operatori integro-diferenţiali autoadjuncţi dar şi neautoadjuncţi. Deoarece pentru cercetarea unor asemenea ecuaţii operatoriale sunt necesare cunoştinţe de analiză matematică, analiză funcţională, de algebră liniară şi elemente de topologie, am considerat necesar ca în primele trei capitole ale cărţii să introducem principalele concepte şi rezultate matematice necesare în elaborarea rezultatelor din ultimele două capitole, care înglobează cercetări ştiinţifice proprii, de ultim moment.

Primul capitol prezintă câteva elemente generale despre spaţiile Hilbert, precum şi despre operatorii liniari şi continui definiţi pe aceste spaţii.

Al doilea capitol l-am dedicat analizei spectrale a unor clase largi de operatori liniari, anume operatorii autoadjuncţi. Determinarea valorilor şi vectorilor proprii pentru astfel de operatori are o importanţă deosebită în studiul fenomenelor elastice din mecanică. Tot în acest capitol am prezentat şi o modalitate de reprezentare sub formă integrală a unui operator autoadjunct.

Întrucât singurii operatori care pot fi extinşi la operatori autoadjuncţi sunt operatorii simetrici şi pozitiv definiţi, am alocat acestei extensii şi proprietăţilor aferente, conţinutul capitolului al treilea.

În capitolul patru am cercetat spectrul punctual pentru o clasă de operatori integro-diferenţiali care sunt întâlniţi în fenomene mecanice. Studiul spectral a fost făcut atât pentru operatori autoadjuncţi cât şi neautoadjuncţi.

Ultimul capitol al cărţii l-am dedicat cercetării absenţei valorilor proprii pentru aceeaşi clasă de operatori integro-diferenţiali cu coeficienţi constanţi, dar şi periodici.

Autorii îşi exprimă recunoştinţa lor pentru discuţiile şi observaţiile utile făcute în legătură cu conţinutul acestei cărţi de domnul Prof. dr. ing. Dumitru Nicolae, Decanul Facultăţii de Mecanică din cadrul Universităţii din Craiova.

Mulţumirile noastre se îndreaptă şi către colegul şi prietenul nostru Cialenco Igor, Associate Professor la Illinois Institute of Technology (Department of Applied Mathematics), USA, pentru ajutorul primit în conceperea şi redactarea unor aspecte ale teoriilor expuse în carte.

Autorii

Capitolul 1

Spaţii Hilbert.

1.1 Spaţii Banach. Spaţii Hilbert.

Pentru început prezentăm o modalitate generală de definire a unui spaţiu Banach, iar ulterior ne vom ocupa mai pe larg de o clasă particulară a acestora şi anume spaţiile Hilbert. Acestea din urmă reprezintă generalizarea cea mai apropiată a spaţiilor euclidiene, deoarece aspectele geometrice pe care le putem aborda cu ajutorul lor sunt asemănătoare cu cele din geometria euclidiană.

Având în vedere că în lucrările [22], [27-28], [33-35], [49-52], [56-57] şi [60] este realizată o descriere detaliată a noţiunilor generale care ţin de Spaţii Hilbert, ortogonalitate în spaţii Hilbert, operatori definiţi în spaţii Hilbert, etc, vom aborda şi noi o prezentare similară, dar pe scurt, a acestor noţiuni.

Definiţie 1.1.1. *Considerăm $\mathcal{K}$ un spaţiu vectorial. O aplicaţie notată cu d şi definită pe $\mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}_+$, se numeşte metrică (sau distanţă) în $\mathcal{K}$, dacă:*

1) $d(x, y) = 0$ *dacă şi numai dacă* $x = y$, *pentru orice* x, y *din* $\mathcal{K}$*;*

2) $d(x, y) = d(y, x)$, *pentru orice* x, y *din* $\mathcal{K}$*;*

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, *pentru orice* x, y, z *din* $\mathcal{K}$.

Perechea $(\mathcal{K}, d)$ se numeşte spaţiu metric.

Definiţia 1.1.2. *Fie un spaţiu vectorial $\mathcal{K}$ peste corpul de scalari $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. O aplicaţie $\|\| : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ se numeşte normă pe $\mathcal{K}$ dacă sunt verificate următoarele condiţii:*

1) $\|x\| = 0$ *dacă şi numai dacă* $x = 0$, *unde* 0 *este vectorul nul din* $\mathcal{K}$*;*

2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, *pentru orice* x, y *din* $\mathcal{K}$*;*

3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, *pentru orice* $\lambda \in \mathbf{K}$ *şi oricare* x *din* $\mathcal{K}$.

Perechea $(\mathcal{K}, \ \|\|)$ o vom numi spaţiu normat.

Definiţia 1.1.3. *Un şir de elemente* $(x_n)_{0\leq n<\infty\infty}$ *din* $\mathcal{K}$ *se numeşte şir Cauchy, dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există* N_ε *astfel încât dacă* $n, m \geq N_\varepsilon$, *atunci*

$$\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon,$$

sau altfel spus şirul $(x_n)_{0\leq n<\infty\infty}$ *din* $\mathcal{K}$ *este Cauchy dacă*

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \|x_n - x_m\| = 0.$$

Definiţie 1.1.4. *Un şir de elemente* $(x_n)_{0\leq n<\infty\infty}$ *din* $\mathcal{K}$ *se numeşte convergent în* $\mathcal{K}$, *dacă există* $x_0 \in \mathcal{K}$ *astfel încât*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0.$$

Definiţia 1.1.5. *Un spaţiu vectorial normat* $\mathcal{K}$ *se numeşte spaţiu Banach dacă orice şir Cauchy este convergent către un element al spaţiului vectorial* $\mathcal{K}$. *Aşadar, un spaţiu Banach este un spaţiu normat şi complet (ca spaţiu metric).*

Definiţia 1.1.6. *Fie* $\mathcal{K}$ *un spaţiu vectorial peste corpul de scalari* $\mathbf{K}$. *O regulă notată prin* $(\cdot, \cdot)$, *definită pe* $\mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathbf{K}$, *care asociază oricărei perechi de vectori* x, y *din* $\mathcal{K}$ *un scalar* (x, y) *din* $\mathbf{K}$, *se numeşte produsul scalar al vectorilor* x, y *dacă:*

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ *pentru orice* $x, y \in \mathcal{K}$, *iar* $\overline{(y, x)}$ *reprezintă conjugatul lui* (x, y);

2) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$, *pentru orice* $x, y, z \in \mathcal{K}$;

3) $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}\,(x, y)$, *pentru orice* $x, y \in \mathcal{K}$ *şi* $\lambda \in \mathbf{K}$;

4) $(x, x) > 0$, *pentru orice* $x \in \mathcal{K}, \ x \neq 0$.

Definiţie 1.1.7. *Dacă* $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ *(respectiv* $\mathbf{K} = \mathbb{C}$*), atunci* $\mathcal{K}$ *se numeşte spaţiu vectorial euclidian (respectiv unitar).*

Definiţie 1.1.8. *Un spaţiu vectorial* $\mathcal{K}$ *se numeşte închis dacă orice şir convergent de vectori* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *din* $\mathcal{K}$ *are limita de convergenţă tot un vector* x *din* $\mathcal{K}$.

Proprietatea 1.1.1. *Fie* $\mathcal{K}$ *un spaţiu vectorial euclidian (sau unitar). Aplicaţia* $\|\| : \mathcal{K} \to \mathbf{K}$, *definită prin*

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

este o normă pe $\mathcal{K}$.

Condiţiile 1) şi 3) din definiţia normei se demonstrează cu uşurinţă printr-o simplă verificare.

Demonstrăm condiţia 2). În acest sens avem nevoie de un rezultat auxiliar cunoscut sub numele de Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz, dată de:

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

pentru orice x, y din $\mathcal{K}$.

Inegalitatea

$$(x - \lambda y, x - \lambda y) \geq 0,$$

este adevărată pentru orice vector $x - \lambda y$, unde λ este un scalar oarecare din corpul de scalari $\mathbf{K}$.

Dezvoltând produsul scalar din partea stângă obţinem:

$$(x,x) - \lambda (y,x) - \overline{\lambda} (x,y) + |\lambda|^2 (y,y) \geq 0.$$

În particular, dacă luăm $\lambda = \frac{(x,y)}{(y,y)}$ (am presupus că $y \neq 0_{\mathcal{K}}$) obţinem:

$$0 \leq (x,x) - 2\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} + \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} = (x,x) - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)},$$

ceea este echivalent cu inegalitatea căutată. Dacă $y = 0_{\mathcal{K}}$, atunci inegalitatea devine o egalitate şi este de asemenea adevărată.

Demonstrăm condiţia 2) din definiţia normei.

Avem

$$\begin{gathered} \|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (y,y) + 2\operatorname{Re}(x,y) \leq \\ \leq (x,x) + (y,y) + 2|\operatorname{Re}(x,y)| \leq (x,x) + (y,y) + 2|(x,y)| \leq \\ \leq (x,x) + (y,y) + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{gathered}$$

adică $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz în spaţiul vectorial $\mathcal{R}_n = \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$, înzestrat cu produsul scalar definit prin

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i,$$

are forma

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\xi_j\eta_j\right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\eta_j^2},$$

unde $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ şi $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ sunt vectori din $\mathcal{R}_n$

Aceeaşi inegalitate, dar în spaţiul $\mathcal{R}(a, b)$ al funcţiilor reale şi continue pe intervalul (a, b), înzestrat cu produsul scalar

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt,$$

are forma

$$\left|\int_a^b x(t)\, y(t)\, dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b x^2(t)\, dt}\sqrt{\int_a^b y^2(t)\, dt},$$

unde $x = x(t)$ şi $y = y(t)$, sunt funcţii reale şi continue pe intervalul (a, b).

Definiţie 1.1.9. *Un spaţiu Hilbert $\mathcal{H}$ este un spaţiu Banach $\mathcal{K}$ în care norma este dată de un produs scalar definit pe $\mathcal{K}$. Adică există $(\cdot, \cdot)$ produs scalar astfel încât*

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Un exemplu de spaţiu Hilbert îl constituie mulţimea şirurilor

$$l^2 = \left\{\xi = (\xi_1, \xi_2, ...) \;\middle|\; \|\xi\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2 < \infty\right\},$$

înzestrată cu produsul scalar dat de regula

$$(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\overline{\eta_i},$$

unde $\eta = (\eta_1, \eta_2, ...)$ este un şir din l^2.

Observaţie 1.1.1. Fie Ω o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^n$. Dacă o proprietate are loc peste tot în Ω, mai puţin pentru elementele unei mulţimi de măsură nulă, atunci spunem că acea proprietate este adevărată aproape peste tot (a.p.t.) în Ω (am presupus cunoscute noţiunile de măsură Lebesgue).

Prezentăm în continuare un alt exemplu de spaţiu Hilbert. În acest sens, considerăm pentru început mulţimea

$$L_2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ măsurabilă şi } \int_\Omega f^2 dx < \infty \right\},$$

care înzestrată cu operaţiile de adunare a funcţiilor şi de înmulţire a acestora cu scalari din $\mathbb{R}$, are o structură de spaţiu vectorial.

Pentru demonstraţie, considerăm două funcţii f, g din $L_2(\Omega)$. Pe baza inegalităţii

$$[f(x) + g(x)]^2 \leq 2\left[f^2(x) + g^2(x)\right], \text{ pentru orice } x \in \Omega,$$

avem că

$$\int_\Omega [f(x) + g(x)]^2 dx \leq 2\left[\int_\Omega f^2(x)\, dx + \int_\Omega g^2(x)\, dx\right] < \infty.$$

Aşadar $f + g \in L_2(\Omega)$.

Dacă $\lambda \in \mathbb{R}$ şi $f \in L_2(\Omega)$, atunci $\lambda f \in L_2(\Omega)$. În concluzie $L_2(\Omega)$ este un spaţiu vectorial real.

În plus, ştim că pentru orice f, g din $L_2(\Omega)$ este adevărată inegalitatea

$$[|f(x)| - |g(x)|]^2 \geq 0, \text{ pentru orice } x \in \Omega,$$

ceea ce ne conduce la concluzia că următoarea inegalitate este adevărată

$$[f(x)\, g(x)]^2 \leq \frac{1}{2}\left[f^2(x) + g^2(x)\right], \text{ pentru orice } x \in \Omega.$$

Ca urmare a inegalităţii anterioare, are sens să definim pe $L_2(\Omega)$ produsul scalar $(\cdot, \cdot) : L_2(\Omega) \times L_2(\Omega) \to \mathbb{R}$, dat de regula

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx, \text{ pentru orice } f, g \text{ din } L_2(\Omega).$$

Pe baza acestui produs scalar introducem pe $L_2(\Omega)$ următoarea normă

$$\|f\| = \sqrt{\int_\Omega f^2(x)\, dx}, \text{ pentru orice } f \text{ din } L_2(\Omega).$$

Având în vedere cele prezentate anterior, se arată destul de simplu că spaţiul vectorial $L_2(\Omega)$ este un spaţiu Hilbert.