

Marius Marinel STĂNESCU

Dan Gheorghe BĂGNARU

**STUDIU COMPUTAȚIONAL AL UNOR ECUAȚII DIFERENȚIALE
ȘI INTEGRO - DIFERENȚIALE.
APLICAȚII ÎN MECANICĂ**

Marius Marinel STĂNESCU

Dan Gheorghe BĂGNARU

**STUDIU COMPUTAȚIONAL AL
UNOR ECUAȚII DIFERENȚIALE ȘI
INTEGRO - DIFERENȚIALE.
APLICAȚII ÎN MECANICĂ**



**EDITURA UNIVERSITARIA
Craiova, 2014**

Referenți științifici:

Prof.univ.dr. Dumitru Bolcu

Conf.univ.dr. Romulus Militaru

Copyright © 2014 Universitaria.

Toate drepturile sunt rezervate Editurii Universitaria.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

STĂNESCU, MARIUS MARINEL

Studiu computațional al unor ecuații diferențiale și integro-diferențiale : aplicații în mecanică / Marius Marinel Stănescu, Dan Gheorghe Băgnaru. - Craiova : Universitaria, 2014

Bibliogr.

ISBN 978-606-14-0840-5

I. Băgnaru, Dan-Gheorghe

51:531

PREFAȚĂ

Analiza principiilor care stau la baza analizei dinamice a sistemelor de corpuri a cunoscut, în ultimii 30 de ani un avânt deosebit datorat mai ales informaticii. Conținutul acestei analize reprezintă astăzi o disciplină științifică de sine stătătoare care a progresat rapid. Pe această direcție se înscrie și prezenta lucrare.

În conținutul cărții sunt prezentate o serie de contribuții originale, în mare parte acestea fiind publicate în reviste de specialitate sau comunicate la diverse conferințe științifice.

Rezultatele originale obținute pot fi concretizate după cum urmează:

- elaborarea, sub formă operatorială, a unor modele matematice în deplasări ale vibrațiilor elementelor cinematice de tip bară dreaptă și de tip placă plană subțire cu comportament liniar elastic, respectiv liniar vâscoelastic;
- elaborarea unor modele matematice sub forma unor sisteme de ecuații integro-diferențiale care descriu vibrațiile elementelor cinematice de tip placă plană subțire cu comportament liniar vâscoelastic;
- elaborarea unor metode de calcul, agreate de computer, pentru soluționarea modelelor matematice în deplasări ale vibrațiilor elementelor cinematice de tip bară dreaptă și de tip placă plană subțire, cu comportament liniar elastic sau liniar vâscoelastic;
- determinarea analitică, aplicând sistemul de calcul *Mathematica*, a câmpurilor de deplasări ale elementelor cinematice, de tip bară dreaptă sau placă plană subțire, cu comportament liniar elastic sau vâscoelastic, elemente constitutive ale unor mecanisme plane;
- obținerea diagramelor de variație ale deplasărilor elementelor cinematice de tip bară dreaptă sau placă plană subțire cu comportament liniar elastic, respectiv liniar vâscoelastic, prin folosirea sistemului de calcul *Mathematica*, pentru cazuri numerice concrete;
- determinarea câmpurilor de viteze și accelerații ale elementelor cinematice de tip bară dreaptă sau placă plană subțire, cu comportament liniar elastic sau liniar vâscoelastic;
- determinarea componentelor tensorului tensiunilor și deformațiilor specifice pentru elementele cinematice de tip placă plană cu comportament liniar elastic, respectiv liniar vâscoelastic;
- elaborarea modelului mecanic și matematic al ambielajului unui motor cu dispunere în V, precum și determinarea legii de mișcare a acestui sistem mecanic cu ajutorul sistemului de calcul *Mathematica*;

- elaborarea modelului mecanic al unui sistem vibrant acționat de camă însoțit evident de modelul lui matematic, și determinarea legii de mișcare a acestui sistem mecanic cu ajutorul sistemului de calcul *Mathematica* și *Maple*;
- analiza comportamentului vibratoriu al unui strung cu variator continuu de turație și absorbitor dinamic, apelându-se la un model cu șapte grade de libertate;
- analiza comportamentului vibratoriu al unui șeping pe un model mecanic cu trei grade de libertate;
- determinarea deplasării relative a celor două roți dințate ale unui mecanism ipotetic cu roți dințate, în direcția liniei de angrenare în timp ce dinții fac contact pe flancul activ sau pe cel inactiv al dintelui, precum și a deplasării relative a roților dințate pe timpul desprinderii (discontinuitățile în angrenare). Trasarea diagramelor de variație corespunzătoare în sistemul de calcul *Mathematica*.
- efectuarea experiențelor cu sistemul electronic *Spider 8*, destinat măsurării numerice a datelor analogice, el fiind un sistem de măsurare modern, de ultima oră, specializat pentru achiziția numerică a mărimilor mecanice precum: forțe, tensiuni mecanice, presiuni, accelerații, viteze, deplasări, temperaturi.

Putem să mai remarcăm faptul că soluțiile obținute cu sistemele de calcul *Mathematica* sau *Maple* pot da informații, încă de la început, într-o activitate de cercetare-proiectare, în privința influenței factorilor de tip cinematic asupra mișcării lanțurilor cinematice din componența unor mașini cum ar fi de exemplu, unele mașini utilizate în construcții, mașini agricole, mașini unelte, automobile etc.

Pentru a avea certitudinea corectitudinii rezultatelor obținute teoretic, o parte din acestea le-am verificat și experimental.

Autorii

CAPITOLUL 1. INTRODUCERE

1.1. Importanța temei și stadiul actual al cercetărilor în privința modelării computaționale a vibrațiilor sistemelor mecanice.

În ultima vreme, așa cum se știe, a crescut considerabil interesul față de utilizarea calculatoarelor, inclusiv în domeniul aplicării lor la diverse transformări și calcule simbolice. Aceasta se datorează, printre altele, elaborării mijloacelor programate care reduc necesitățile de a elabora programe proprii în scopul rezolvării diverselor probleme. Sistemele electronice de calcule analitice, cum ar fi *Mathematica*, *MatLab*, *Maple* sau *Mathcad* au în componența lor mii de comenzi incluse și funcții unite în biblioteci, precum și posibilități de vizualizare a procesului de trasare a graficelor. Astfel, este puțin probabil că ar putea exista proiecte științifice serioase care să nu aibă tangență cu matematica și duse la bun sfârșit fără utilizarea calculatoarelor electronice. Un înalt nivel de siguranță a calculurilor îl poate asigura folosirea mai multor sisteme ale matematicii computaționale.

Multe dintre metodele de calcul folosite au la bază un formalism matriceal, formalism ușor de implementat pe computer. O bună parte a soluțiilor ecuațiilor diferențiale, care descriu, de exemplu, comportamentul sistemelor materiale la acțiunea factorilor interni și externi care acționează asupra lor, se pot obține cu ajutorul calculatorului.

Conceperea sistemelor mecanice devine foarte automatizată în cadrul Concepției Mecanice Asistată de Calculator (C. M. A. O). Astfel, în¹ se prezintă o cutie de viteze cu arbori paraleli, care comportă două etaje de reducere, problema pusă aici constând în cuantificarea comportamentului dinamic și vibratoriu pentru a califica concepția acesteia.

Modul în care vibrează structurile mecanice este adesea un punct esențial în concepția mecanică a sistemelor complexe din motive de securitate, de confort și de performanță, cum ar fi, necesitatea prevenirii instabilității aerodinamice a avioanelor, grija privind accelerația percepută de pasagerii unui vehicul sau aceea privind nivelul de radiații acustice, respectiv oboseala materialelor. Astfel, de exemplu, necesitățile recente în domeniul vehiculelor în materie de securitate în momentul coliziunilor au condus la necesitatea de a prevedea, încă din faza de proiectare, comportamentul structurilor supuse la mari deformații în regim dinamic destul de rapid².

Pentru validarea modelelor mecanice un rol important, îl au cu siguranță, testele dinamice. Astfel, un rol important îl joacă problemele de analiză experimentală modală, precum și modul în care se poate face corespondența

¹ Satori, K., El Kihel, B., Étude et modélisation des mécanismes complexes en conception assistée par ordinateur, *Journal de physique*, vol. 7, n°11, ISSN 1155-4320, pp. 2211-2223, Editions de physique, Les Ulis, France, 1997.

² Feng, Z. Q., Simulation numérique des structures à l'impact et au crash, Séminaire de Modélisation Mécanique, Laboratoire de Mécanique de Lille, (28 mai 1998).

calculare-testare, precum și actualizarea modelului³. Larg folosite în mecanică și, în particular, în mecanica vibrațiilor sunt problemele inverse. Printre aplicațiile și metodele abordate în acest sens putem cita problemele inverse ale surselor, optimizarea formei, controlul activ al dispozitivelor de transport al fluidelor sau, în sfârșit, metodele ecuațiilor integrale mult utilizate în mecanică și acustică.

În același context, este de remarcat că determinarea parametrilor legilor de comportament dinamic, actualizarea modelării structurilor dinamice plecând de la măsurile dinamice măsurate precum și identificarea defectelor prin metode nondistructive (unde), constituie exemple importante ale așa numitor probleme inverse (identificarea sistemelor) în dinamica structurilor⁴.

Comportamentul vibratoriu al unei structuri mecanice complexe este foarte bine reprezentat la frecvențe joase prin modurile sale proprii de vibrații, aceasta având o importanță practică notabilă pentru tot ceea ce înseamnă acustica internă și/sau externă a vehiculelor de transport: automobile, feroviare, aeronautice.

Un rol important îl are estimarea fină a erorilor legate de modelare și de influența perturbațiilor, atunci când se pun în operă unele strategii mai eficiente de control al comportamentului vibratoriu al structurilor mecanice complexe. Ca urmare, stăpânirea diverselor fenomene vibratorii în sistemele mecanice complexe ridică probleme de cercetare fundamentală și nu din cele banale, cum ar fi cunoașterea fenomenologică a diverselor surse de vibrații, inducând astfel eforturi în căutarea unor metodologii inovatoare din punctul de vedere al modelării, pe de o parte, și, pe de altă parte, din cel al unei gândiri pertinente în privința obiectivelor legate de diverse aplicații în care apar constrângeri în urmărirea performanțelor din ce în ce mai ridicate atunci când se utilizează aceste sisteme. Una din activitățile de cercetare în acest sens se referă la modelarea și studiul fenomenelor vibratorii în sistemele de fabricație, orientată fiind spre integrarea comportamentului dinamic al acestor sisteme în procesul de dezvoltare a liniilor de fabricație (traiectorii de uzinaj, planificarea proceselor). Un astfel de proiect de cercetare nu se poate concepe decât în relație cu alte preocupări științifice ale cercetătorului sau ale echipei de cercetători, necesitând punerea în valoare a unei serii de competențe cum ar fi:

- determinarea în faza de proiectare a comportamentului dinamic al sistemelor mecanice complexe;
- dezvoltarea și evaluarea de tehnici rapide și solide pentru studiul stabilității sistemelor cu *întârziere* (simularea în domeniul temporal, metode multi-frecvențiale, tehnici de regrupare a rădăcinilor-*root clustering*);
- modelarea fenomenelor specifice (tăierea metalelor) și a interacțiunilor în sistemul uzinal în prezența vibrațiilor;
- dezvoltarea de tehnici de control activ a fenomenelor vibratorii în prelucrările mecanice (tehnici de control a sistemelor cu *întârziere*);

³ Pavel, E., Elemente de analiză modală, Editura Tehnică, București, 1994.

⁴ Radeș, M., Metode dinamice pentru identificarea sistemelor mecanice, Editura Academiei Române, București, 1976.

- luarea în considerare a constrângerilor dinamice în faza de proiectare a mașinilor;
- integrarea și managementul modelelor la diferite scări.

Comportamentul dinamic al sistemelor mecanice este adesea afectat de efectele neliniare, care, în numeroase cazuri, se situează la nivelul interfețelor de cuplaj între diferite componente ⁵ (excitații dinamice generate de contactul în organele de transmitere a mișcării și a eforturilor, instabilități legate de frecarea în sistemele mecanice) care pot conduce la efecte nedorite (zgomote) sau care pot dăuna menținerii în funcțiune a mecanismului (uzură excesivă). În ⁶, într-o formulare lagrangeiană, se adoptă o descriere a comportamentului geometric neliniar al sistemelor mecanice, dându-se aici totodată și un algoritm, adaptabil calculatorului, de integrare a ecuațiilor de mișcare. Autorii își propun astfel să furnizeze mijloacele necesare modelării computaționale a vibrațiilor neliniare ale sistemelor mecanice discretizate, făcând referire și la metodele actuale de simulare numerică în acest domeniu. În același context, în ⁷ se prezintă formulări computaționale pentru analiza unor probleme de mecanică neliniară.

În prezent activitățile de cercetare se concentrează pe dezvoltarea competențelor experimentale, teoretice și numerice multidisciplinare puse în joc atunci când se concep structurile, elementele mașinilor sau, în general, sistemele mecanice. Scopul cercetării este de a îmbunătăți cunoștințele despre comportamentul materialelor și al structurilor, de a dezvolta modele și instrumente utile în procesul de proiectare a structurilor și mașinilor și de a valorifica o cultură tehnică în privința metodologiilor de analiză, de concepție și de fabricație. Aceste cercetări se sprijină pe domeniile științei materialelor, ale mecanicii neliniare a solidelor, fluidelor și sistemelor cuplate, ale acusticii, ale tehnicii de formare și de prelucrare, ale metodelor de măsurare experimentale și ale modelării numerice.

Tot de domeniul actualității ține și tendința de înlocuire a materialelor metalice cu materiale cu comportament reologic, acestea din urmă având o serie de avantaje, unul dintre ele, foarte important, fiind acela al existenței unor forțe și cupluri de inerție reduse datorate masei specifice mai mici în raport cu materialele metalice în condiții de rigiditate comparabile.

Generalizarea teoriei elasticității și a dinamicii fluidelor vâscoase a condus la crearea teoriei liniare a vâscoelasticității, corpurile cu un astfel de comportament supunându-se principiului suprapunerii al lui Boltzmann. S-au construit astfel modele mecanice constând din sisteme de arcuri și amortizoare, arcurile descriind proprietățile elastice ale corpului, iar amortizoarele pe cele vâscoase.

⁵ Băgnaru, D., *Vibrațiile elementelor cinematice*, Editura SITECH, Craiova, 2005, ISBN 973-657-854-2.

⁶ Renaud C., Cros J.-M., Feng Z.-Q., Yang B., The Yeoh model applied to the modeling of large deformation contact/impact problems, *International Journal of Impact Engineering*, 36, 659-666 2009.

⁷ Feng, Z. Q., On some computational aspects for analysis of multiphysics and nonlinear mechanics problems, *International seminar on the R & D of ceramic composites*, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, China, 14-17 april 2008.

Există modele vâscoelastice, pentru cazul solicitărilor triaxiale ⁸, obținute ca urmare a unor generalizări, unele dintre acestea apelând la calculul operațional.

Majoritatea teoriilor moderne au la bază relația tensiune - deformăție – timp, care este eficientă în descrierea, de exemplu, a comportării vâscoelastice a polimerilor ⁹ în stare solidă (a maselor plastice).

Teoria vâscoelasticității liniare constituie de fapt un sistem de metode teoretice care prelungesc teoria clasică a elasticității, incluzând într-un mod judicios factorul timp, unul din obiectele principale de studiu constituindu-l, de exemplu, deformarea polimerilor solizi.

Așa cum am arătat și mai sus, studiul vibrațiilor neliniare a structurilor a constituit, în ultimii ani, obiectul a numeroase lucrări. Până de curând luarea în considerare a comportamentului vâscoelastic pentru studiul vibrațiilor neliniare n-a fost făcută decât în cadrul unor modele analitice bazate pe metoda lui Galerkin. Validitatea acestor modele este, deci, limitată de frecvențele vibrațiilor apropiate de frecvența de rezonanță liniară. În plus, efectul neliniarității cu privire la forma modului de vibrație nu este luat în seamă. În lucrarea ¹⁰, însă, se propune o metodă numerică pentru calculul răspunsului dinamic neliniar al grinzilor *sandwich* (fig.1.1). Un punct important îl constituie luarea în considerare a comportamentului vâscoelastic dependent de frecvență pentru stratul central. Rezolvarea problemei este realizată cu ajutorul metodei echilibrului armonic și cel al elementelor finite. Se arată aici că proprietățile de amortizare ale grinzilor *sandwich* depind de amplitudinea vibrației.

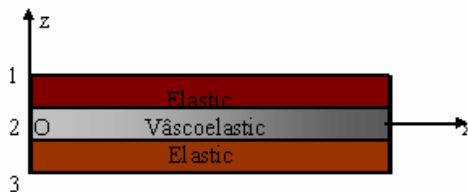


Fig.1.1 Grindă sandwich

Astfel, în figura 1.1 se consideră o grindă *sandwich* simetrică cu trei straturi, straturile 1 și 3, de grosime h_f , având un comportament elastic, iar stratul din mijloc, de grosime h_c , un comportament vâscoelastic. Proprietățile de amortizare ale acestui tip de structură provin în principal din diferența care apare între deplasările longitudinale ale fețelor (rigiditatea *inimii* grinzii fiind în general mai slabă decât cea a fețelor). Din acest motiv autorii acestei lucrări au introdus câte un câmp de deplasări pentru fiecare strat. Fețele sunt tratate ca niște grinzi Euler-

⁸ Fafard, M., Modélisation de la viscoélasticité 3D: cas anisotrope, isotrope et paramètres viscoélastiques variables, Département de génie civil, Université Laval Québec, Canada, 2007.

⁹ Atchounglo K., Banna M., Dupré J.-C., Feng Z.-Q., Vallée C., Polymers thermophysics parameters estimation in one-dimensional case, International Journal for Simulation and Multidisciplinary Design Optimization, 2, 65-69, 2008.

¹⁰ Jacques, N., Daya, El. M., Potier - Ferry, M., Vibrations non linéaires de poutres sandwich viscoélastiques, 18eme Congres Francais de Mecanique Grenoble, 27-31 aout 2007.

Bernoulli, iar inima ca o grindă Timoshenko. În plus, se presupune un colaj perfect între straturi și că cele două fețe au aceeași rotație. Se obțin relațiile dintre deplasări și deformații sub forma:

$$\begin{aligned}\varepsilon_i(x, z, t) &= \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right]^2 - (z - z_i) \frac{\partial w^2(x, t)}{\partial x^2}, \quad i = \overline{1, 3} \\ \varepsilon_2(x, z, t) &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right]^2 + z \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x}, \\ \gamma_2(x, t) &= \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + \beta(x, t),\end{aligned}\quad (1.1)$$

unde $u = u_2$, u_i și z_i desemnează deplasarea longitudinală și respectiv poziția fibrei mediane a stratului i , w este deplasarea transversală și β rotația stratului central. De notat că neliniaritățile geometrice au fost luate în considerare conform teoriei lui von Kármán.

Comportamentul stratului vâscoelastic este descris aici cu ajutorul produsului de convoluție

$$\sigma_2(x, z, t) = \int_{-\infty}^t Y(t - \tau) \frac{\partial \varepsilon_2(x, z, t)}{\partial \tau} d\tau = Y \cdot \dot{\varepsilon}_2, \quad \tau_2 = \frac{Y \cdot \dot{\gamma}_2}{2(1 + \nu_c)}, \quad (1.2)$$

unde Y este funcția de relaxare a materialului, iar ν_c coeficientul lui Poisson presupus constant. În sfârșit, ecuația de mișcare a acestei grinzi, excitată transversal de o forță de intensitate F , s-a obținut prin aplicarea principiului lucrului mecanic virtual sub forma

$$\begin{aligned}\int_0^L \left[N \left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) + M_\beta \frac{\partial \delta \beta}{\partial x} + M_w \frac{\partial \delta^2 w}{\partial x^2} + T \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} + \delta \beta \right) \right] dx = \\ = \int_0^L F \delta w dx - (2\rho_f S_f + \rho_c S_c) \int_0^L \left(\ddot{w} \delta w + \ddot{u} \delta u \right) dx,\end{aligned}\quad (1.3)$$

cu

$$\begin{aligned}N &= 2E_f S_f \varepsilon + S_c Y \dot{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad T = \frac{S_c}{2(1 + \nu_c)} Y \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) + \dot{\beta}, \\ M_\beta &= \frac{E_f S_f h_c}{2} \left(h_c \frac{\partial \beta}{\partial x} - h_f \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + I_c Y \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial x}, \quad M_w = E_f \left(2I_f + \frac{S_f h_f^2}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \\ &\quad - \frac{E_f S_f h_c h_f}{2} \frac{\partial \beta}{\partial x}\end{aligned}$$

și unde: E_f este modulul lui Young al celor două fețe, S_i reprezintă aria, ρ_i masa specifică, indicele $i = f$ fiind pentru cele două fețe ale grinzii și $i = c$ pentru inima acesteia.