**DORIN ŞENDRESCU**

# METODE ŞI ALGORITMI PENTRU IDENTIFICAREA PARAMETRICĂ A SISTEMELOR

EDITURA UNIVERSITARIA
Craiova, 2013

Referenţi ştiinţifici:
Prof.univ.dr.ing. EUGEN BOBAŞU
Prof.univ.dr.ing. DAN SELIŞTEANU

Copyright © 2013 Universitaria
Toate drepturile sunt rezervate Editurii Universitaria

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României**

**ŞENDRESCU, DORIN**
**Metode şi algoritmi pentru identificarea parametrică a sistemelor** / Dorin Şendrescu. - Craiova : Universitaria, 2013
Bibliogr.
ISBN 978-606-14-0662-3

004.424.62:004.032.26

**Această lucrare a fost finanţată din contractul POSDRU/89/1.5/S/61968, proiect strategic ID 61968 (2009), cofinanţat din Fondul Social European, prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007 - 2013.**

Apărut: 2013
**TIPOGRAFIA UNIVERSITĂŢII DIN CRAIOVA**
Str. Brestei, nr. 156A, Craiova, Dolj, România
Tel.: +40 251 598054
Tipărit în România

# CAPITOLUL I

# IDENTIFICAREA SISTEMELOR PE BAZA RĂSPUNSULUI LA INTRARE TREAPTĂ

În acest capitol prezentăm o serie de metode de identificare a parametrilor funcțiilor de transfer prin prelucrarea răspunsului sistemelor la intrare de tip treaptă. Aceste metode sunt simplu de implementat în practică, Metodele descrise în continuare se aplică pentru sisteme cu o singură intrare și o singură ieșire descrise prin ecuații diferențiale cu coeficienți constanți. În primele două paragrafe sunt descrise o serie de metode grafice de identificare modelelor de ordinul unu şi doi pentru sisteme liniare cu autoechilibrare. Paragrafele 3, 4 şi 5 descriu în detaliu algoritmii de identificare bazaţi pe metoda momentelor. Aceşti algoritmi pot fi utilizaţi pentru determinarea coeficienţilor funcţiilor de transfer de orice ordin precum şi pentru determinarea gradului polinoamelor de la numărătorul şi numitorul acestora (determinarea ordinului sistemului). Dacă obiectul identificat are întârziere pură, constanta de întârziere se consideră ca fiind egală cu intervalul de timp dintre momentul aplicării semnalului treaptă și momentul în care ieșirea are o variație procentuală mai mare decât clasa de precizie a traductoarelor.

## 1.1 Identificarea parametrilor funcției de transfer de ordinul I

Presupunem, fără pierderea generalității, că valoarea de regim staţionar la momentul iniţial pentru toate mărimile este egală cu zero. Considerăm un răspuns aperiodic (al unui sistem liniar) la o intrare treaptă cu amplitudinea $U_0$, ca în figura următoare:

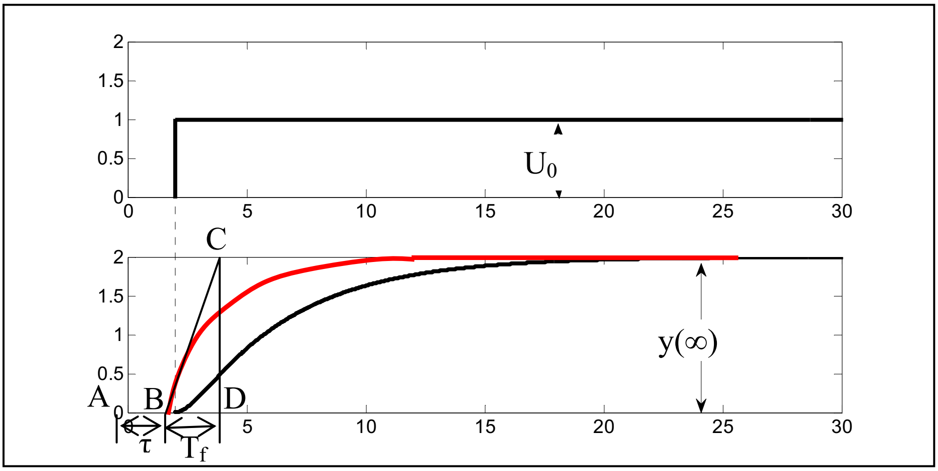


**Fig. 1.1.1** *Determinarea parametrilor funcției de transfer folosind răspunsul unui sistem la intrare treaptă unitate*

Aproximarea sistemului se face cu o funcţie de transfer de ordinul I de forma:

$$H_f(s) = \frac{K_f}{T_f s + 1} e^{-\tau s} \tag{1.1.1}$$

Pentru determinarea factorului de amplificare se măsoară valorile $U_0$ și y(∞). Factorul de amplificare se calculează cu formula:

$$K_f = \frac{y(\infty)}{U_0} \tag{1.1.2}$$

Pentru determinarea lui $T_f$ există mai multe metode:

*Metoda I.* În punctul B se duce o tangentă la răspuns care intersectează ordonata y(∞) în punctul C. Considerând D proiecția punctului C pe axa timpului, $T_f$ este egal cu lungimea segmentului BD. Tangenta se poate duce în orice punct al răspunsului.

*Metoda II.* Constanta $T_f$ este egală cu intervalul de timp dintre momentul inițial și momentul în care ieșirea atinge valoarea:

$$y(t)=0.6231* y(\infty) \tag{1.1.3}$$

*Metoda III.* Se calculează aria:

$$A = \int_{t_0+\tau}^{\infty} [y(\infty) - y(t)]dt \tag{1.1.4}$$

Constanta de timp $T_f$ este egală cu raportul:

$$T_f = \frac{A}{y(\infty)} \tag{1.1.5}$$

***Observații***

1. Metoda I este o metodă rapidă însă erorile de trasare a tangentei, în special când obiectul are în realitate ordinul mai mare de unu, afectează direct rezultatul.

2. Metoda II este de asemenea o metodă rapidă dar este dependentă de perturbațiile aditive sau erorile de măsurare ce afectează direct rezultatul.

3. Metoda III solicită un efort de calcul mai mare dar realizează echivalarea sistemului cu un element de ordinul I având în vedere întreaga evoluție a răspunsului, astfel că erorile ce apar la primele două metode se compensează prin mediere.

# 1.2 Identificarea parametrilor funcției de transfer de ordinul II

## 1.2.1 Funcție de transfer de ordinul II cu poli reali

Dacă răspunsul sistemului este aperiodic ca în figura 1.2.1 aproximarea sistemului cu un model de ordinul II se realizează considerând o funcție de transfer de forma:

$$H_f(s) = \frac{K_f p_1 p_2}{(s+p_1)(s+p_2)} = K_f \frac{1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)} \tag{1.2.1}$$

unde

$$p_1 = \frac{1}{T_1}, p_2 = \frac{1}{T_2} \tag{1.2.2}$$

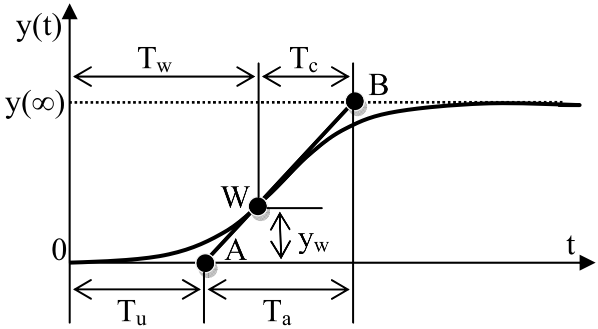


**Fig. 1.2.1** *Determinarea parametrilor funcției de transfer de ordinul II folosind răspunsul unui sistem la intrare treaptă unitate*

Pe răspunsul sistemului la intrare treaptă (prezentat în Fig. 1.2.1) se definesc prin construcție elementele: $T_w$, $h_w$, $T_c$, $T_u$, $T_a$. Pentru aceasta, în punctul de inflexiune W se duce o tangentă la curba experimentală și se determină punctele A și B de intersecție a tangentei cu dreptele orizontale specifice regimului staționar inițial și final. Factorul de amplificare se determină în mod similar cu cazul sistemului de ordinul I:

$$K_f = \frac{y(\infty)}{U_0} \tag{1.2.3}$$

unde $U_0$ reprezintă amplitudinea semnalului treaptă aplicat la intrarea sistemului.

Pentru estimarea constantelor de timp ale sistemului se rezolvă un sistem de ecuații având aceste constante drept necunoscute, ecuații ce sunt dependente de valorile unor elemente grafice ce pot fi ușor evaluate. Pentru simplificarea expresiei răspunsului, se definesc următoarele mărimi:

$$\beta = \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \tag{1.2.4}$$

$$\alpha = e^{-\frac{\beta}{\beta-1}\ln\beta} \tag{1.2.5}$$

Funcția indiciaă, derivatele acesteia și punctul de inflexiune sunt definite de următoarele relații:

$$y(t) = \left[1 - \frac{\beta}{\beta-1}\left(e^{-p_2 t} - \frac{1}{\beta}e^{-p_1 t}\right)\right] \tag{1.2.6}$$

$$\dot{y}(t) = \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2}\left(e^{-p_1 t} - e^{-p_2 t}\right) \tag{1.2.7}$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2}\left(-p_1 e^{-p_1 t} + p_2 e^{-p_2 t}\right) \tag{1.2.8}$$

$$T_w = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \ln \frac{T_2}{T_1} \tag{1.2.9}$$

$$y_w = y(T_w) \Rightarrow y_w = [1 - (\beta + 1)\alpha] \tag{1.2.10}$$

$$m = \dot{y}(T_w) = \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2}\alpha(1 - \beta) \tag{1.2.11}$$

Cu aceste notații, ecuația tangentei în punctul de inflexiune este:

$$y - y_w = m \cdot (t - T_w) \tag{1.2.12}$$

Folosind ecuația acestei drepte, se pot calcula abscisele punctelor de intersecție dintre aceasta și dreptele orizontale specifice regimurilor staționare inițial și final (punctele A și B). Se obțin următoarele relații:

$$T_c = T_1 + T_2 \tag{1.2.13}$$

$$T_a = \frac{1}{p_1 \cdot \alpha} \tag{1.2.14}$$

Pe baza acestor relații se calculează funcțiile $f_1(\beta)$ și $f_2(\beta)$ :

$$f_1(\beta) = \frac{T_a}{T_u} = \frac{1}{\alpha\left[\frac{\beta}{\beta - 1}\ln\beta - \frac{1 - (\beta + 1)\alpha}{\alpha}\right]} \tag{1.2.15}$$

$$f_2(\beta) = \frac{T_w}{T_1} = \frac{\beta}{\beta - 1}\ln\beta \tag{1.2.16}$$

Algoritmul de identificare este următorul:

1. Se determină punctul de inflexiune.
2. Se trasează tangenta în punctul de inflexiune și se determină punctele de intersecție A și B.
3. Se determină constantele $T_a$, $T_w$, $T_c$ și $T_u$.
4. Se calculează raportul ($T_a/T_u$) și se determină valoarea corespunzătoare a parametrului $\beta$ din relația (1.2.15)
5. Pentru valoarea parametrilor $\beta$ de mai sus se determină valoarea rapoartului ($T_w/T_1$)

6. Se calculează

$$T_1 = \frac{T_w}{(T_w / T_1)} \tag{1.2.17}$$

7. Se calculează constanta $T_2$ cu relația:

$$T_2 = \beta\, T_1. \tag{1.2.18}$$

## 1.2.2 Funcție de transfer de ordinul II cu poli complex conjugaţi

O astfel de funcţie de transfer este reprezentată sub forma:

$$H(s) = \frac{K\,\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \xi \in (0,1) \tag{1.2.19}$$

sau

$$H(s) = \frac{1}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{K_f}{T_f^2 s^2 + 2T_f \xi s + 1}, \xi \in (0,1) \tag{1.2.20}$$

unde,

$$K = \frac{1}{a_0} \; ; \quad T_f = \sqrt{\frac{a_2}{a_0}} ; \qquad 2T_f \xi = \frac{a_1}{\sqrt{a_0 a_2}} \tag{1.2.21}$$

Coeficienţii $a_0$, $a_1$ şi $a_2$ se pot obţine din funcţia indicială y(t) folosind relaţiile următoare:

$$a_0 = \frac{u(\infty)}{y(\infty)} \tag{1.2.22}$$

$$a_1 = \frac{a_0 \cdot I_1}{y(\infty)} \qquad a_2 = \frac{a_1 \cdot I_1 - a_0 \cdot I_2}{y(\infty)} \tag{1.2.23}$$

unde,

$$I_1 = \int_0^\infty [y(\infty) - y(t)]dt \qquad I_2 = \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty [y(\infty) - y(\theta)]d\theta \right] dt \tag{1.2.24}$$

Valorile celor două integrale se pot determina cu ajutorul unui program de calculator (folosind de exemplu metoda trapezelor). Cu valorile $a_0$, $a_1$ şi $a_2$ astfel calculate se pot apoi determina constantele K, $T_f$ şi $\xi$.

# 1.3. IDENTIFICAREA SISTEMELOR FOLOSIND METODA MOMENTELOR

În cazul în care se doreşte identificarea unor modele liniare de ordin superior metodele grafice devin mult mai complicate iar calitatea estimării scade. Prezentăm în continuare o metodă relativ simplă de identificare cunoscută sub numele de metoda momentelor. Această metodă permite simultan determinarea gradului numărătorului şi numitorului funcţiei de transfer precum şi a coeficienţilor acesteia.

## 1.3.1 Definiţia momentelor

Un moment de ordinul j al unei funcţii y(t) (notat $m_j$) este o caracteristică naturală a unei funcţii original cu indicele de convergenţă $\sigma_0 \le 0$

$$y(t): \Re \to \Re;\ y(t) = 0, t < 0, \exists M, \sigma_0\ a.i. |y(t)| \le Me^{\sigma_0 t}, \forall t \ge 0,\ \sigma_0 \le 0 \quad (1.3.1)$$

care admite transformata Laplace :

$$Y(s) = L\{y(t)\} = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt,\ \mathrm{Re}(s) > \sigma_0 \quad (1.3.2)$$

Funcţia y(t) poate reprezenta un semnal oarecare sau răspunsul unui sistem liniar la o intrare cunoscută.

Deoarece $\sigma_0 \le 0$, valoarea semnalului în noul regim staţionar este finită ($y(\infty) < \infty$) şi datorită teoremei valorii finale din transformarea Laplace, care se poate aplica în condiţiile de mai sus,

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} sY(s)\,.$$

Notăm prin $\varepsilon(t)$ deviaţia mărimii y(t) faţă de valoarea sa în regim staţionar:

$$\varepsilon(t) = y(\infty) - y(t),\ t \ge 0$$

Se defineşte momentul de ordinul j al funcţiei y(t) definită prin condiţiile de mai sus [Akh65]:

$$m_j = \int_0^{\infty} \frac{(-t)^j}{j!}(y(\infty) - y(t))dt = \int_0^{\infty} \frac{(-t)^j}{j!}\varepsilon(t)dt \tag{1.3.3}$$

Momentul de ordinul j reprezintă aria subgraficului funcţiei $\varepsilon(t)$ ponderată printr-un factor de ponderare

$$\Psi_j(t) = \frac{(-t)^j}{j!} \tag{1.3.4}$$

a deviaţiei funcţiei faţă de valoarea sa în regim staţionar.

Considerarea acestei definiţii a unui moment, prin deviaţia unei funcţii faţă de valoarea sa finală, permite manipularea şi a unor semnale caracterizate prin $\sigma_0 = 0$, aşa cum sunt, de exemplu, răspunsurile la intrare treaptă ale sistemelor care nu au caracter derivator.

De exemplu,

$$m_0 = \int_0^{\infty} \varepsilon(t)dt \tag{1.3.5}$$

este chiar aria deviaţiei, iar

$$m_1 = -\int_0^{\infty} t\varepsilon(t)dt$$

$$m_2 = \int_0^{\infty} \frac{t^2}{2}\varepsilon(t)dt \tag{1.3.6}$$

reprezintă aria ponderată liniar, respectiv pătratic.

Chiar dacă momentele apar ca fiind entităţi matematice abstracte introduse prin integrale, de tipul unor funcţionale, ele sunt foarte naturale aşa cum este natural pentru inginerii din automatică să folosească transformarea Laplace şi să mânuiască funcţiile de transfer.

***<u>Exemplul 1.3.1.</u>*** Se consideră funcţia:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-t/T}, & t \geq 0 \end{cases}, \quad y(\infty) = 0 \tag{1.3.7}$$

al cărei grafic este prezentat în figura 1.3.1.

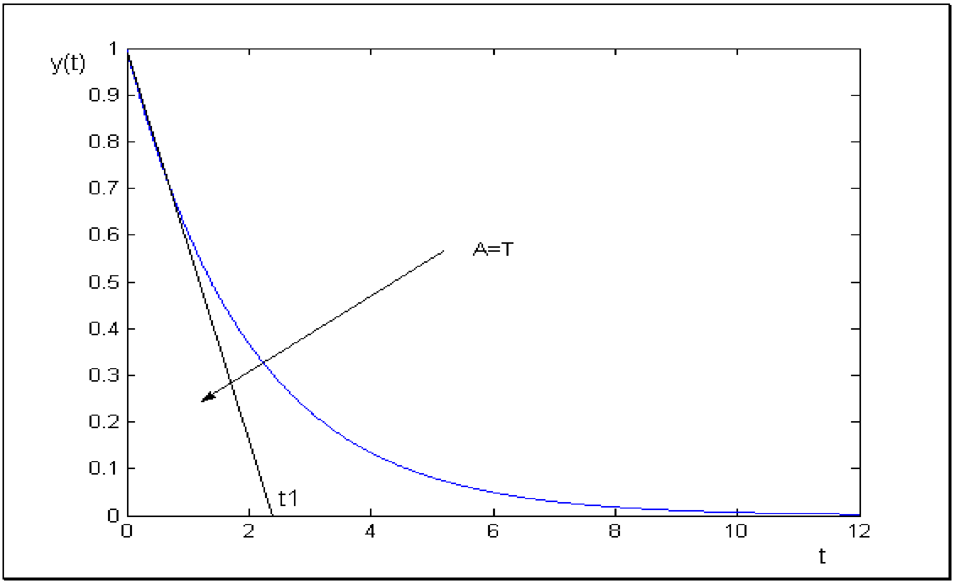


**Fig. 1.3.1.** *Graficul funcţiei exponenţiale*

Pentru această funcţie momentul de ordinul 0 este:

$$m_0 = \int_0^{\infty} (y(\infty) - y(t))dt = -\int_0^{\infty} e^{-t/T} dt = T$$

Transformata Laplace a acestei funcţii este :

$$Y(s) = L\{e^{-t/T}\} = \frac{T}{Ts+1} = \frac{1}{s+p},\ p = 1/T, \mathrm{Re}(s) > -p = \sigma_0 \qquad (1.3.8)$$

Evoluţia funcţiei y(t) pentru orice moment de timp $t \geq 0$, este exprimată printr-un număr infinit de puncte (t, y(t)), adică un număr infinit de informaţii. În domeniul complex aceeaşi funcţie este caracterizată prin trei informaţii care exprimă anumite caracteristici aşa cum arată tabelul următor :

| Caracteristici în domeniul complex | Caracteristici în domeniul timp |
|---|---|
| Transformata Laplace raţională | Funcţie exponenţială |
| Numărătorul este egal cu 1 | y(0)=1 |
| Numitorul este egal cu s+1/T | $t_1$=T |

Deci, dacă se cunoaşte transformata Laplace putem aprecia care va fi evoluţia pe întregul interval de timp $[0,\infty)$. Caracteristicile transformatei Laplace Y(s) pot fi exprimate prin următoarele informaţii cuantificate referitoare la graficul în domeniul timp al funcţiei:

- funcţie exponenţială simplă ;
- y(0)=1
- intervalul de timp $t_1$ este egal cu T.

Aceleaşi informaţii pot fi obţinute folosind momentele de ordinul j, definite mai sus:

- $y(\infty) = 0$
- $m_j = (-T)^{j+1},\ j \ge 0$

Momentele $m_j$ şi valoarea $y(\infty)$ pot fi determinate pe cale experimentală prin prelucrarea funcţiei $y(t), t \ge 0$.

Aceasta presupune un efort de calcul mai mare dar, aşa cum se poate observa, lipseşte informaţia apriorică referitoare la structura funcţiei, ceea ce este foarte important.

Calculăm integrala :

$$m_j = \int_0^\infty \frac{(-t)^j}{j!}(y(\infty) - y(t))dt = \int_0^\infty \frac{(-t)^j}{j!} e^{-t/T} dt = (-T)^{j+1},\ j \ge 0. \quad (1.3.9)$$

Pentru determinarea expresiei în domeniul timp a funcţiei y(t), se folosesc numai informaţii obţinute din prelucrări experimentale: $y(\infty)$ şi $m_j$.

***<u>Observaţii:</u>***

1. Nu este necesară nici o informaţie apriorică despre structură;
2. Nici una din aceste informaţii nu se bazează pe anumite valori speciale ale funcţiei y(t) într-un anumit punct al domeniului timp.

Fiecare valoare a funcţiei y(t) aduce o contribuţie infinit de mică în determinarea acestor momente şi a valorii limită $y(\infty)$. Aceste avantaje sunt evidente atunci când funcţia procesată este contaminată cu zgomote şi este dificil să se aprecieze pante, puncte de inflexiune, etc. Dând o importanţă mare anumitor valori în anumite momente de timp, se acordă aceeaşi importanţă şi zgomotului n(t) care însoţeşte acele valori.