

Trandafir T. BĂLAN

Trandafir T. BĂLAN

E S E U R I
MATEMATICĂ - VIAȚĂ - CREDINȚĂ



EDITURA UNIVERSITARIA
Craiova, 2021

Referenți științifici:

Prof.univ.dr. Carmen Luminița MOCANU

Conf.univ.dr. Cristian VLADIMIRESCU

Copyright © 2021 Editura Universitaria Craiova

Toate drepturile sunt rezervate Editurii Universitaria

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

BĂLAN, TRANDAFIR

Eseuri : matematică - viață - credință / Trandafir T. Bălan. - Craiova :
Universitaria, 2021

Conține bibliografie

ISBN 978-606-14-1750-6

51

© 2021 by Editura Universitaria

Această carte este protejată prin copyright. Reproducerea integrală sau parțială, multiplicarea prin orice mijloace și sub orice formă, cum ar fi xeroxarea, scanarea, transpunerea în format electronic sau audio, punerea la dispoziția publică, inclusiv prin internet sau prin rețelele de calculatoare, stocarea permanentă sau temporară pe dispozitive sau sisteme cu posibilitatea recuperării informațiilor, cu scop comercial sau gratuit, precum și alte fapte similare săvârșite fără permisiunea scrisă a deținătorului copyrightului reprezintă o încălcare a legislației cu privire la protecția proprietății intelectuale și se pedepsesc penal și/sau civil în conformitate cu legile în vigoare.

PREFAȚĂ

Invitația de a scrie câteva cuvinte în prefața volumului ”*Eseuri: Matematică – Viață – Credință*” m-a onorat, datorită prestanței științifice a autorului, dar a generat în același timp obligația de a parcurge cu atenție o carte care nu este întotdeauna ușor de parcurs și de înțeles. Autorul, băănățean de origine și absolvent (1964) al Facultății de Matematică a Universității din Timișoara, a parcurs ulterior (din 1966) o remarcabilă carieră didactică și de cercetare la Universitatea din Craiova.

Pasionat de matematică, dar în egală măsură de conexiunile ei cu viață reală și cu existența spirituală a ființei umane, profesorul Trandafir Bălan ne propune o incursiune, complet diferită de cele pe care le întâlnim în mod obișnuit, în esențele cele mai adânci ale Universului, de la nivelul macrocosmosului la nivelul cuantic, de la dimensiunile lui reale la cele spirituale, esențe filtrate exclusiv prin percepțiile și viziunea autorului.

Îmi este sincer greu să menționez aici ce apreciez mai mult la această lucrare: capacitatea autorului de a explica noțiuni matematice abstracte, într-un limbaj simplu și pe înțelesul cititorilor, viziunea și intuițiile legate de semnificația acestor noțiuni, sau, poate, curajul lui de a face analogii între noțiuni și concepte aparent complet diferite. Conexiuni precum ”spațiul ca dificultate” și ”timpul ca speranță” sunt neașteptate, greu de înțeles și de acceptat pentru un cititor neavizat, dar devin oarecum naturale pentru un gânditor, așa cum este autorul, care a asociat de fiecare dată conceptele matematice abstracte despre spațiu și timp cu experiențe concret-intuitive din existența zilnică. Spațiu-timpul privit din perspectiva teoriilor relativiste devine un univers al ”evenimentelor”, un spațiu *viu* pe care trebuie să îl utilizăm și să îl înțelegem.

Prezentul volum vine ca o continuare aproape firească a unor preocupări anterioare ale autorului, începute încă din studenție, în legătură cu inegalitatea inversată a triumghiului, întâlnită în cadrul strict matematic al unor algebre de numere. În Relativitate este celebrul „paradox al ceasurilor”, pe care autorul ni-l evidențiază acum într-o mulțime de fenomene naturale. În particular, *homeostazia* apare ca fenomen relativist în sistemele vii.

În anul 1974, când a beneficiat de o bursă a fundației Alexander von Humboldt, la Tübingen, domnul profesor Bălan a formulat teoria structurilor *horistologice*, specifice discretitudinii. Studiul acestor structuri a continuat în colaborare cu mai mulți matematicieni din țară și din străinătate.

Mai târziu, în anul 2016, a publicat la Editura *Universitaria* din Craiova monografia „*Complements of Hyperbolic Mathematics – from super-additivity to structural discreteness*”, monografie în care a adunat rezultatele științifice obținute în domeniul horistologiei. Prezentul volum explicitează idei prezente în lucrările anterioare și invită la reflexii pe teme de mare actualitate precum necesarul dialog între științe și religie. În acest sens, autorul își exprimă poziția ecumenică, a necesității înțelegerii și dialogului între toate religiile, consideră că ”Dumnezeu este același pentru toate religiile, există doar reprezentări diferite”. Această poziție este în mod original susținută prin ipoteza de incompletitudine a universului de evenimente perceptibile de către ființele vii (proprietate de factură matematică, privind șirurile de evenimente).

Ca o concluzie, dincolo de conținutul lor și de ideile emise de autor, pe care le putem accepta sau nu, cele 7 eseuri reunite în prezentul volum adună noțiuni din matematică, îmbrăcate într-o haină selectă de filozofie și cu extensii uneori neașteptate spre probleme majore din existența noastră. Cartea este o lectură frumoasă pentru cei care sunt gata să accepte idei noi și îndrăznețe, dar temeinic ancorate într-un respectabil material bibliografic tradițional.

*Prof. univ. dr. Radu Constantinescu
Departamentul de Fizică
Universitatea din Craiova
Iunie 2021*

INTRODUCERE

MOTTO

*Nu am vrut să sculptez pasărea,
am vrut să sculptez zborul.
Constantin Brâncuși*

Mult probabil, prima impresie a cititorului care vede în titlu trei dintre cele mai provocatoare subiecte – *matematică, viață, credință* – este mirarea pentru curajul (dacă nu chiar tupeul) pe care l-am avut de a aborda aceste domenii într-un volum de simple eseuri. Știu că vor fi mulți chiar și *oameni ai cărții* care vor renunța din start la lectură din cauza referirii la *matematică*. De la cei care totuși insistă, vor veni reproșuri (deja auzite) de tipul: „*nu știu ce sunt numerele hiperbolice*”, sau „*ce sunt transformările Lorentz?*” etc. Pe de altă parte, m-aș întreba și eu „*oare știm mult mai bine ce este viața, sau ce este credința?*”. În eseurile de față mi-am propus în primul rând mie însumi să-mi lămuresc răspunsuri la asemenea întrebări, iar apoi, la îndemnul unor prieteni, să le prezint spre dezbatere și altor cititori.

Au trecut cinci ani de la apariția monografiei mele „*Complements of Hyperbolic Mathematics – from super-additivity to structural discreteness*” la Editura *Universitaria*, Craiova, 2016 (pe scurt [BT]), fără să apară reacții nici măcar din partea colegilor care cât de cât îi cunoșteau conținutul. Nu sunt surprins, deoarece remarcasem încă de la începutul preocupărilor mele în acest domeniu reținerea cu care sunt privite matematicile hiperbolice. O primă explicație sunt fenomenele stranie întâlnite acolo, cum sunt paradoxul ceasurilor (super-aditivitatea) și incompatibilitatea cu structurile continuului (topologiile). O altă explicație a reticenței față de acest domeniu este faptul că școala – pe tot parcursul, până la studiile postuniversitare – evită această viziune a realității, canalizând preocupările majorității celor studioși spre teoriile clasice, unde toate structurile se raportează la ideea de *continuum*.

Desigur, nu pot să las toată „*vina*” lipsei de preocupare pentru cartea mea pe seama colegilor; am recunoscut slaba putere de convingere a prezentării cărții încă de la festivitatea de lansare, unde, în afară de matematicieni, nu a mai fost alt auditoriu realmente interesat. Cu alte cuvinte, cartea din 2016 se reduce la explicarea drumului spre structuri proprii *discretului*, generate de metrice super-aditive, cu probleme și aplicații doar de natură matematică.

Conștient de consecințele neglijării în [BT] a exemplelor concrete, care ar fi trebuit să meargă până la viața de zi cu zi, am început să mă documentez și să scriu despre cele aflate, rezultatul fiind eseurile din prezentul volum. Punctul de pornire a fost extinderea noțiunii de *dificultate*, care în [BT] se referă doar la „*dificultatea demonstrației unei implicații*”, la *dificultăți* recunoscute cu ușurință în experiența zilnică a tuturor oamenilor. Am înțeles apoi că *spațiul* (chiar și în Teoria Relativității) se poate măsura și prin *dificultatea* de a-l parcurge, iar *timpul* (*propriu*, în relativitate) se pretează la interpretarea ca *speranță* de finalizare a parcurgerii unui spațiu. Prin eseurile de față se explicitează drumul spre formularea în termeni de dificultate și speranță a unor aplicații practice. Cum eseurile nu au fost concepute de la început ca părți ale unui volum, unele dintre ideile de bază se regăsesc în mai multe locuri. Textele nu au fost scrise în ordinea în care sunt înșiruite aici, dar această ordine asigură cel mai bine coerența în volum, sper.

Primul eseu – *Discretitudine structurală* – este un rezumat fără formule a subiectelor din [BT], care explică adevărata cauză a scrierii celorlalte eseuri. (De fapt l-am scris ulterior acestora, după ce am luat decizia de a le reuni într-un volum spre publicare.) Este util în conturarea problemelor specifice *matematicii hiperbolice*. În centrul atenției stă regula inversată a triunghiului (numită *super-aditivitate*, pe scurt S.a.), care conduce la structuri duale topologiilor (numite *horistologii*). Horistologiile se dovedesc a fi un cadru adecvat pentru studiul unor noțiuni ca *mulțime discretă* și *funcție discretă* în universuri de evenimente, fapt care justifică interpretarea lor ca *structuri ale discretului*. Concordanța cu viziunile *relativistă* și *cuantică* a fenomenelor din Natură face ca aceste domenii să fie considerate *teorii ale discretului* sub aspect structural (diferit de *discretitudinea* care există și în topologie!).

Al doilea eseu este o scurtă (și încurajatoare, sper) prezentare a propunerii de a interpreta *spațiul* ca *dificultate* și *timpul* ca *speranță*, cale pe care putem recunoaște ideile relativiste în viața de zi cu zi, fără viteze comparabile cu cea a luminii. Este schițată și paralela cu *dificultatea* unui sistem viu de a-și realiza homeostazia, respectiv *speranța* depășirii acestei dificultăți.

În eseu al treilea am evidențiat câteva *dificultăți* cu care se confruntă ființele vii, în special omul, pentru a se menține în viață. Evident, există multe alte tipuri de dificultăți, de exemplu cele de socializare, cu sfaturile de rigoare în cărți, pe internet etc. Pentru a obține definiții formalizate ale dificultății și speranței sunt precizate sensurile noțiunilor *timp*, *stare*, *eveniment accesibil* și *factor perturbator*. Posibilități de măsurare am prezentat pentru dificultăți ca *înțelegerea* unei implicații logice, *deplasarea* în spațiu (atât nonrelativist cât și relativist) și *homeostazia* sistemelor vii. Eseul se încheie cu câteva caracteristici matematice ale sistemelor vii prezentate în termeni relativști.

În eseu *Viziune subiectivă a spațiu – timpului* se reia interpretarea *spațiului* ca *dificultate* și cea a *timpului* ca *speranță* atât în sens clasic cât și relativist. Este explicat faptul că în spații neizotrope (ca planul înclinat, la munte) regula obișnuită a triunghiului este realmente inversată.

Eseul Nr.5 conține simțitor mai multe detalii, în special matematice, privind problemele sugerate de eseurile anterioare. Aici sunt analizate două tipuri de evenimente prin care se evidențiază paralela dintre homeostazia sistemelor vii și relativitate: valorile unui parametru corespund vitezelor de mișcare, iar dificultățile corespund pozițiilor spațiale. Secțiunea 4 a acestui eseu conține câteva proprietăți ale sistemelor vii care corespund spațiu-timpului relativist și pot fi prezentate cu mijloace matematice uzuale: modelarea cu ecuații diferențiale și metoda variațională a acțiunii minime.

Deși m-am referit și la câteva aspecte matematice, parafrazând vorbele lui Constantin Brâncuși – motto, cred că intenția mea este clară: *N-am vrut să pun viața într-o ecuație, ci doar să-i înțeleg zborul*. Instrumentele la care am apelat pentru înțelegerea vieții au fost câteva cunoștințe de matematică. Nu știu în ce măsură aceste instrumente pot fi acceptate, căci matematicienii vor fi mai interesați de acest domeniu doar după ce practicienii vor găsi mai multe fenomene concrete care să necesite asemenea instrumente, iar practicienii rareori se inspiră din matematică.

Între diversele fenomene observate de oameni în Natură, *viața* a fost (și încă este) cel mai greu de înțeles. Pentru a-l explica, oamenii fie au imaginat intervenția unor divinități, fie au căutat explicații parțiale verificabile – sau, pe scurt, fie au formulat diverse religii, fie au făcut investigații științifice. În consecință, înțelegerea vieții presupune și credințe, nu numai teorii.

Eseul „*Cred ceea ce sunt*” este ca un modest răspuns la celebrul dicton de la Delphi „*Cunoaște-te pe tine însuși*”, în jurul căruia am constatat că există o întreagă filosofie. Deși încercarea de a urma acest drum al autocunoașterii s-a dovedit benefică pentru mine, am scris acest eseu fără vreo intenție de a schimba vonvingeri – respect fiecare credință în parte. Ceea ce sper să aducă lectura lui este o mai mare toleranță și înțelegere dintre diferitele religii. Din dorința de posedare a unor bunuri materiale este oarecum normal să apară conflicte, dar bunurile spirituale ar trebui să îi apropie pe oameni, cred eu.

În *Post Scriptum* am redat o experiență deosebit de interesantă, dar și utilă. Acolo am inserat precizările și completările cele mai semnificative la Eseul nr.6, sugerate de cei care au văzut acest eseu în diverse forme intermediare.

Craiova, 25 mai 2021

1. Discretitudine structurală

– Horistologie fără formule –

Acest eseu este un scurt rezumat al cărții mele intitulată *Complements of Hyperbolic Mathematics, from Super-additivity to Structural Discreteness*, publicată de Editura Universitaria Craiova în 2016, la care mă voi referi ca [BT]. Intenția este să punctez ideile principale ale cărții dar fără să folosesc formule, sperând să obțin un text ușor de accesat de către ne-matematicieni. Totuși, voi reveni asupra mai multor figuri din [BT] căci “o imagine poate spune mai mult decât o mie de cuvinte”. În general, matematicile de liceu vor fi suficiente pentru înțelegere.

Prezentarea va avea un caracter subiectiv în sensul că toate aspectele teoretice – de principiu – vor fi raportate la propria mea activitate de studiu și înțelegere a fenomenelor specifice.

1. Super-aditivitatea

Se acceptă aproape în unanimitate că cel mai scurt drum între două puncte se obține pe linia dreaptă. În termeni de *inegalitate a triunghiului*, care spune că „o latură a unui triunghi este mai mică decât suma celorlalte două”, această proprietate este numită *sub-aditivitate* (s.a.) a distanței. Inegalitatea opusă, numită *super-aditivitate* (S.a.), este atât de bizară încât chiar și un student la matematică poate să nu o întâlnească pe parcursul studiilor. Acesta a fost și cazul meu și al colegilor mei, explicația fiind aceea că matematicile clasice folosesc s.a. pentru teorii ale continuului. Eu am întâlnit S.a. în teza de licență, despre *Algebrele Clifford*, deși profesorii noștri nu le-au menționat-o niciodată la cursuri. Acolo, în cazul simplu al *numerelor hiperbolice*, în locul imaginarului i , apare j , cu pătratul pozitiv.

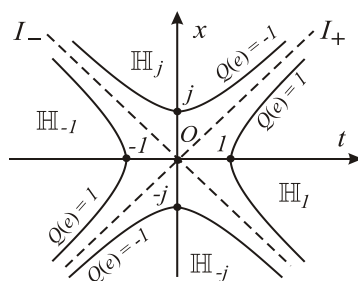


Fig.I.4.1.

Distanța dintre două numere hiperbolice a fost pentru mine primul exemplu de metrică S.a. (ca și în spațiul obișnuit, Euclidian, prin *metrică*

înțelegem o funcție care dă rezultatul măsurătorii distanței dintre două puncte arbitrare). Aceste asemănări dintre evenimentele de pe o dreaptă și numerele hiperbolice nu sunt o fantezie matematică, ci reprezintă aspecte din lumea reală. În plus, se stabilesc o serie de conexiuni prin care se poate aprofunda studiul ambelor entități matematice – numere, respectiv evenimente relativiste. Schimbările sistemelor inerțiale de referință, redată de transformările Lorentz, sunt rotații hiperbolice (ca în Fig. II.3.10).

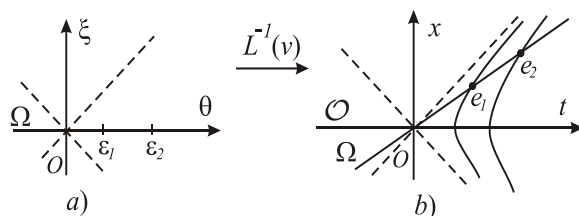


Fig.II.3.10.

Stabilirea unor asemenea interpretări nu a fost chiar simplă, deși am apelat la mai mulți dintre profesori. Eram tot în Timișoara, când încă nu vedeam sensul practic al S.a. pe un exemplu concret: *Ce înseamnă că între două evenimente timpul propriu este de o sută de ori mai mare decât între alte două evenimente?* Chiar și atunci când am adresat-o autorului unei cărți cu interpretări fizice ale geometriilor, răspunsul pe care l-am primit la această întrebare a fost că: *așa rezultă din calcule!*

Valabilitatea Teoriei Relativității Restrânse (TRR) la alte universuri de evenimente, mai cuprinzătoare decât spațiu-timpul bidimensional, mi-a sugerat extinderea căutării inegalității S.a. în cazuri mai generale. Un prim pas a fost să examinez mai îndeaproape legătura dintre metrice S.a. și relații de tip *cauzalitate*, specifice relativității.

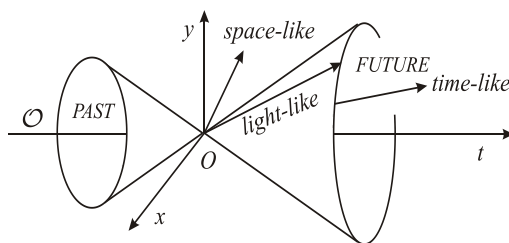


Fig.II.5.5.

Fig. II.5.5. este o imagine tri-dimensională a ceea ce căutam să extind. Ea este ultima dimensiune pentru care se poate face un desen, reprezentând noțiunile specifice TRR pentru evenimentele ce au loc, în timp, într-un plan.

Dificultatea unei demonstrații a fost un prim exemplu de S.a. de care mi-am dat seama în afara cadrului spațiilor liniare; cred că eram deja la Craiova (1966). Acest exemplu este interesant prin aceea că evidențiază inegalitatea S.a. în tot ce se face în matematică sub aspectul implicațiilor logice. Toate proprietățile ce se studiază în matematică sunt enunțuri de tipul „*Dacă ...* (se spune o ipoteză, *H*), *atunci ...* (se spune o concluzie, *C*)”. Nu cred că există cineva care să se fi întâlnit cu un asemenea enunț (chiar în afara matematicii, în alte științe, sau în viața de zi cu zi) și să nu fi constatat că există o dificultate de a justifica – sau cum spun matematicienii, *a demonstra* – o asemenea implicație între ipoteză și concluzie. Dificultatea este micșorată dacă se identifică măcar un fapt intermediar, *F*, evidențiat în demonstrație, așa cum se vede în Fig. I.1.1.

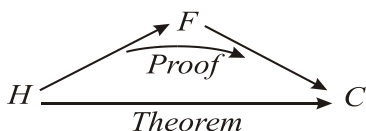


Fig.I.1.1.

Pentru a evalua o astfel de dificultate nu am mai găsit formule ca pentru numere hiperbolice sau evenimente relativiste, dar putem număra faptele intermediare (ca în logica propozițiilor sau în logica teoriilor axiomatice). În rest, nu cunosc vreo metodă de a evalua asemenea dificultăți, care ar putea să ne permită să comparăm între ele diverse teoreme și să le ierarhizăm.

Analiza bidimensională a fost un domeniu pe care l-am întâlnit imediat după transferul meu de la Timișoara la Craiova (1966); era *specialitatea* noului meu șef de catedră – prof. dr. doc. Eugen V. Dobrescu. Ceea ce mi-a părut a fi chiar predestinare a fost faptul că, fără să fi căutat în vreun fel, în acest domeniu am dat peste metrici S.a. asemănătoare celor întâlnite până atunci. Analiza bidimensională reia teoriile clasice – limite, continuitate, derivabilitate, integrale, convergență etc. – prin construcții directe pentru funcțiile de două variabile. În particular, în locul distanței obișnuite dintre două puncte din plan apare o „distanță” dintre patru puncte, nu oricare, ci doar pentru vârfurile unui dreptunghi cu laturile paralele cu axele, și anume aria acestui dreptunghi.

După cum se vede în Fig. IV.4.1., această metrică este S.a., în sensul că aria dreptunghiului mare este mai mare decât suma ariilor a două dreptunghiuri generate de un punct intermediar (în sensul ordinei produs). Această inegalitate nu era folosită în analiza bidimensională, care dorindu-se o teorie a continuului, evita S.a. în favoarea inegalității s.a., la care apela *in extremis* pentru un grup de patru dreptunghiuri.

Este totuși de remarcat că ariile considerate în analiza bidimensională reprezintă măsuri ale „*distanței bidimensionale*” numai pentru anumite cvartete de puncte, deci sunt *restrânse*.

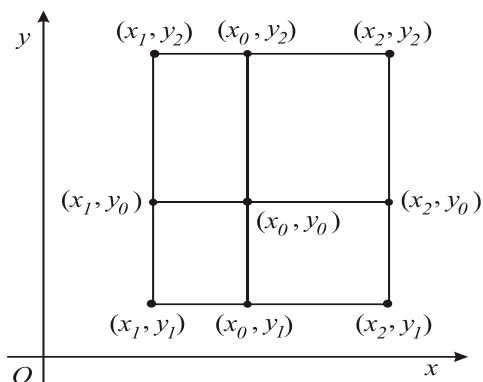


Fig.IV.4.1.

Proprietatea de a fi *restrânse*, de a avea sens numai pentru anumite seturi de puncte este specifică metricilor S.a.: timp propriu există doar între evenimentele în relația cauză-efect; discutăm despre o dificultate a unei demonstrații doar dacă teorema este corectă; distanța (hiperbolică) dintre două numere hiperbolice este un număr real doar dacă pentru ele avem o expresie pozitivă sub radical, ceea ce corespunde relației de cauzalitate. De aceea am început să analizez ce se întâmplă dacă restrângem chiar o metrică obișnuită, sub-aditivă, la o relație de ordine (ca în exemplele de mai sus).

Metricile restrânse au reprezentat un obiect de studiu în primele mele lucrări (publicate începând din 1968). Spre deosebire de metricile obișnuite, care dau distanțele măsurate între oricare două puncte din spațiu, *metricile restrânse* sunt definite numai pentru anumite perechi de puncte, cum ar fi evenimentele *cauză-efect* din relativitate. Proprietatea metricilor S.a. de a fi *restrânse* este specifică: inegalitatea S.a. nu poate avea loc pentru fiecare pereche dintr-un triplet de evenimente și chiar dacă are loc pentru o latură a unui triplet, nu mai poate avea loc și pentru alta.

Restrângerea la o relație de ordine este aplicabilă și unei metrici s.a., fără să se piardă topologia. Deși clasa metricilor s.a. restrânse extinde efectiv pe cea a metricilor obișnuite (în sensul că există metrici restrânse care nu se pot extinde la toate perechile de puncte), acestea operează în cadrul teoriei continuului, fiind generatoare de topologii – recunoscute ca structuri ale continuului.

În Fig. IV.3.5. sunt ilustrate două exemple de discuri unitate (respectiv două tipuri de vecinătăți ale originii) generate de metrici restrânse – la

ordinea produs în cazul a), respectiv la ordinea cauzală în cazul b) – care nu admit extensii la toate perechile de puncte din plan.

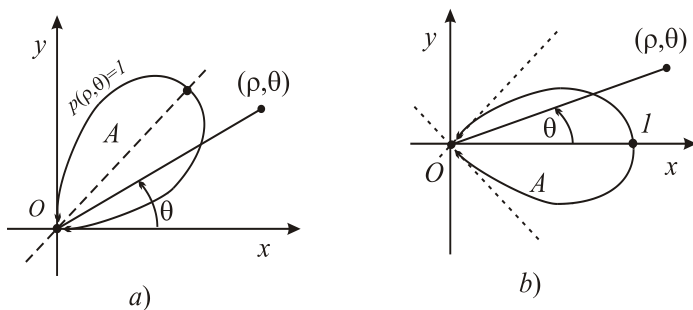


Fig.IV.3.5.

În spații liniare, opoziției dintre metricile s.a. și cele S.a. îi corespunde cea dintre (semi-) *normele* s.a. și S.a. (Noțiunea de *normă* extinde pe cea de *modul* al numerelor reale.) La rândul lor, *normele* s.a. derivă din mulțimi *convexe* ale spațiului, în timp ce *normele* S.a. se atașează mulțimilor *concave*. Deși bizare, *normele* S.a. au aplicații în programarea concavă via mulțimile concave generatoare (studiate în Franța de J-P Crouzeix & co).

Tot în spațiile liniare, adversitatea dintre sub- și supra-aditivitate se regăsește într-un caz și mai particular decât cel al *normelor*, și anume între *produsele interioare* (semi-) *definite* și cele *indefinite*. În particular, în geometria de liceu se studiază *produsul scalar* a doi vectori, din care derivă toate noțiunile structurii Euclideane: *normă* (și *metrică* s.a.), *ortogonalitate* și *unghi*. Această dezvoltare este posibilă deoarece *produsul scalar* este pozitiv definit, adică pătratele tuturor vectorilor sunt numere reale pozitive. Există însă și *produse interioare* numite *indefinite*, în care există vectori cu pătrat pozitiv, dar și vectori cu pătrat negativ, așa cum se întâmplă în universurile de evenimente relativiste. Deși spațiile cu *produs interior indefinit* sunt posesoare ale unor *norme* (și *metrici*) S.a., există monografii întregi asupra acestora în care fenomenul de *super-aditivitate* nici nu este menționat; explicația constă în faptul că analiza funcțională clasică este o teorie axată pe continuitate, deci bazată pe structuri topologice, în care S.a. nu este de nici un folos, ba mai mult deranjează.

Așa cum un spațiu Euclidian se construiește cu ajutorul unui *produs scalar*, dintr-un *produs interior indefinit* pe un univers de evenimente relativiste derivă ceea ce în [BT] am numit *crono-geometrie* (pentru a sublinia prezența unei dimensiuni temporale). Sub aspect exterior, o serie de proprietăți geometrice privind cercurile și elipsele se dovedesc a avea perechi ce vizează hiperbolele în universurile de evenimente (cele trei

cercuri ale lui Țițeica, punctul Torricelli-Fermat etc.). Trecerea de la geometria produsului scalar la crono-geometria produsului indefinit relativist nu se reduce la o simplă „copiere în oglindă”, deoarece trebuie reformulate chiar noțiunile fundamentale ale geometriei: NU mai există „unghi” între oricare două semidrepte cu vârf comun; NU mai există „triunghi”, ci numai anumite ansambluri de trei segmente (numite *trilat-uri* în [BT]), sau mai general doar triplete de evenimente (numite *three-event-uri*); NU mai este suficientă *trigonometria circulară*, căci uneori trebuie să apelăm și la cea hiperbolică ș.a.m.d. În schimb se obțin interpretări fizice ale proprietăților evenimentelor în termeni specifici relativității (restrânse).

În [BT] sunt analizate două tipuri de probleme legate de relația de cauzalitate, care este o ordine în universul de evenimente relativiste:

1. **Structura de multilattice.** O mulțime ordonată este numită *latice* dacă pentru oricare două elemente ale ei mulțimea majoranților comuni acestora are un cel mai mic element (unic, numit *supremum*), iar mulțimea minoranților are un cel mai mare element (unic, numit *infimum*). Proprietatea de a fi latice este și ea utilă în studiile topologice. Relația de cauzalitate în universurile de evenimente relativiste nu este laticială decât în cazul dimensiunii 2 (vezi Fig.IV.2.1., unde doar în cazul *a*) cauzalitatea este laticială; în cazul *b*) ea este *multilaticială*).

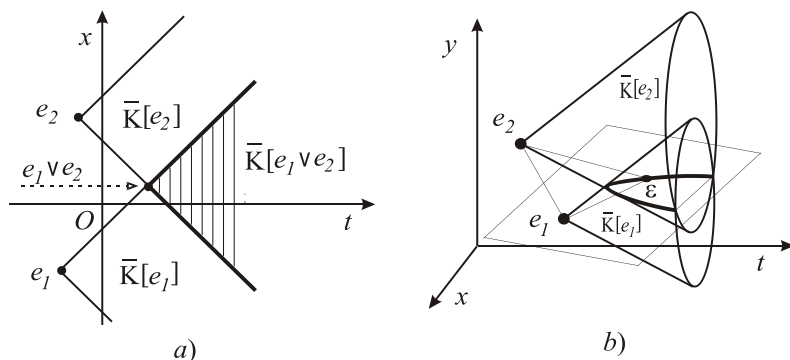


Fig.IV.2.1.

În general, aceste universuri de evenimente formează *multilatici*.

2. **Teorema lui Zeeman** afirmă că orice transformare a unui univers de evenimente relativiste, care păstrează relația de cauzalitate se reduce la o *izometrie* (deci păstrează și metrica S.a. intrinsecă, la fel ca transformările Lorentz) cu condiția ca dimensiunea să fie mai mare decât 2 (din nou!). Aspectul cel mai frapant este că din aspecte calitative – respectarea cauzalității – rezultă aspecte cantitative – păstrarea valorilor unei metrici.