ION PALARIE

CULEGERE DE PROBLEME REZOLVATE DE OPTICA MEDIILOR ANIZOTROPE

ION PALARIE

CULEGERE DE PROBLEME REZOLVATE DE OPTICA MEDIILOR ANIZOTROPE

Editura UNIVERSITARIA,
Craiova, 2016

Referenți științifici:
Conf.univ.dr. Gabriela IACOBESCU
Conf.univ.dr. Mariana OSIAC

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
PĂLĂRIE, ION
Culegere de probleme rezolvate de optica mediilor anizotrope / Ion Pălărie. - Craiova : Universitaria, 2016
Conţine bibliografie
ISBN 978-606-14-0985-3

535

1. Dependenţa indicelui de refracţie extraordinar de direcţia de propagare

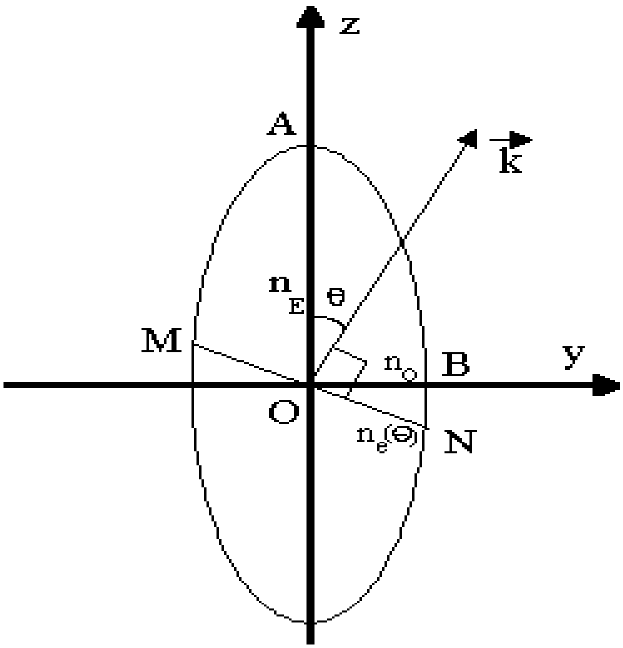
Calculaţi indicele de refracţie al cuarţului pentru unda extraordinară cu λ =589 nm ce se propagă pe o direcţie ce formează unghiul $\theta = 60^0$ cu axa optică. Pentru lungimea de undă $\lambda = 589nm$, indicele de refracţie ordinar este $n_o = 1{,}544$ iar indicele extraordinar principal este $n_E = 1{,}553$.

Rezolvare

Cuarţul este un mediu anizotrop uniax pozitiv. Fie Oz *axa optică a sa. Elipsoidul de indici de refracţie este în acest caz un*

elipsoid de revoluţie în jurul axei optice Oz. *Fără a restrânge din generalitate putem presupune că direcţia de propagare a undei extraordinare* $\vec{k}$ *este conţinută în planul* yOz. *Fie* θ *unghiul dintre* $\vec{k}$ *şi* Oz. *Intersecţia elipsoidului de indici cu planul* yOz *este elipsa din figura alăturată, având semiaxele* n_o *de-a lungul lui* Oy *şi* n_E *de-a lungul lui* Oz, *descrisă prin ecuaţia:*

$$\frac{y^2}{n_0^2} + \frac{z^2}{n_E^2} = 1$$



Pentru a determina valoarea indicelui de refracţie pentru unda extraordinară ce se propagă pe direcţia $\vec{k}$ *trebuie să găsim lungimea segmentului* ON *care este perpendicular pe* $\vec{k}$*. Notăm* $ON = n_e(\theta)$*. Este evident că* $\widehat{NOB} = \theta$ *(ca unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare).*

Punctul N *are coordonatele:*

$$y_N = n_e(\theta)\cos\theta \text{ şi } z_N = -n_e(\theta)\sin\theta$$

Punctul N *aparţine elipsei şi deci (* y_N, z_N *) verifică ecuaţia acesteia.*

Obţinem $$\frac{n_e^2(\theta)\cos^2\theta}{n_0^2} + \frac{n_e^2(\theta)\sin^2\theta}{n_E^2} = 1$$

Înlocuind $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$ *se obţine în final relaţia:*

$$n_e(\theta) = \frac{n_0 n_E}{\sqrt{n_0^2 + \left(n_E^2 - n_0^2\right)\cos^2\theta}}.$$

Calculul numeric conduce la valoarea $n_e(\theta) = 1{,}550$

2. Grosimea minimă a unei lame undă

Determinaţi grosimea minimă a unei lame din calcit, pentru ca aceasta să fie lamă undă pentru radiaţia cu lungimea de undă $\lambda = 589nm$. Precizăm că pentru calcit, indicii de refracţie corespunzători acestei lungimi de undă sunt: n_o $= 1{,}65836$ şi $n_E = 1{,}48641$.

<u>Rezolvare</u>

Calcitul este un mediu uniax negativ ($n_0 > n_E$*). Deoarece ne*

interesează grosimea minimă a lamei undă, trebuie ca lama să fie tăiată paralel cu axa optică şi iluminarea să fie normală.

Diferenţa de drum optic Δ *dintre componentele ordinară şi extraordinară emergente din lama de grosime* e *este:*

$$\Delta = (n_o - n_E)e$$

Condiţia ca lama să fie lamă undă este:

$$\Delta = k\lambda;\ k \in N^*$$

Combinând relaţiile anterioare şi dorind ca e să fie minimă obţinem k=1 şi deci:

$$e_{\min} = \frac{\lambda}{n_o - n_E}$$

Numeric obţinem $e_{\min} = 3{,}425\mu m$.

3. Vectorul Jones normat al stării liniar polarizate

Vectorul Jones normat ce caracterizează starea de polarizare liniară care formează unghiul θ cu axa Ox este $\hat{V} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$. Determinaţi starea ortogonală acesteia.

Rezolvare

Deoarece starea de polarizare descrisă prin $\hat{V}$ este liniară, rezultă, utilizând sfera Poincare, că starea ortogonală acesteia trebuie să fie tot liniar polarizată. Căutăm vectorul Jones normat de forma:

$$\hat{V}' = \begin{pmatrix} \cos\theta' \\ \sin\theta' \end{pmatrix}$$

Din condiţia de ortogonalitate, în sens hermitic, $\hat{V}^{+}\hat{V}' = \hat{V}'^{+}\hat{V} = 0$ vom determina valoarea lui θ'.

Dar $\hat{V}^{+} = (\cos\theta \quad \sin\theta)$ şi $\hat{V}'^{+} = (\cos\theta' \quad \sin\theta')$

$$\hat{V}^{+}\hat{V}'=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta' \\ \sin\theta'\end{pmatrix}=\cos(\theta'-\theta)$$

$$\hat{V}'^{+}\hat{V}=\begin{pmatrix}\cos\theta' & \sin\theta'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}=\cos(\theta'-\theta)$$

Impunând condiţia $\cos(\theta'-\theta)=0$ *rezultă* $\theta'=\theta+\frac{\pi}{2}$ *şi deci*

$$\hat{V}'=\begin{pmatrix}\cos\theta' \\ \sin\theta'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix}.$$

4. Vectorul Jones normat al stării circular polarizate

Vectorii Jones normaţi asociaţi stărilor circular polarizate stânga şi dreapta sunt

$\hat{G}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 \\ +i\end{pmatrix}$ respectiv $\hat{D}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 \\ -i\end{pmatrix}$. Verificaţi ortogonalitatea acestor stări.

Rezolvare

Pentru a verifica ortogonalitatea celor două stări, trebuie probată relaţia:

$$\hat{D}^{+}\hat{G}=\hat{G}^{+}\hat{D}=0.$$

Dar $\hat{D}^{+}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & +i\end{pmatrix}$ *şi* $\hat{G}^{+}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\end{pmatrix}$. *Obţinem*

$$\hat{D}^{+}\hat{G}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & +i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ +i\end{pmatrix}=0 \text{ şi } \hat{G}^{+}\hat{D}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ -i\end{pmatrix}=0$$

5. Vectorul Jones normat al stării eliptic polarizare

Din compunerea undelor liniar polarizate de-a lungul lui Ox: $X(t) = A_x \cos \omega t$ şi de-a lungul lui Oy: $Y(t) = A_y \cos(\omega t - \phi)$, care se propagă în direcţia Oz, obţinem, în general, o undă eliptic polarizată caracterizată prin defazajul ϕ între componentele carteziene şi prin $tg\chi = \dfrac{A_y}{A_x}$. Vectorul Jones normat asociat este $\hat{J}(\chi,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\chi \\ \sin\chi \cdot e^{i\phi} \end{pmatrix}$. Verificaţi că starea ortogonală este caracterizată de vectorul Jones normat $\hat{J}'(\chi,\phi) = \hat{J}\left(\chi + \dfrac{\pi}{2}, \phi\right)$.

Rezolvare

Trebuie arătat că $\hat{J}'^{+}(\chi,\phi) \cdot \hat{J}(\chi,\phi) = \hat{J}^{+}(\chi,\phi) \cdot \hat{J}'(\chi,\phi) = 0$

Dar $\hat{J}'(\chi,\phi) = \hat{J}\left(\chi + \dfrac{\pi}{2}, \phi\right) = \begin{pmatrix} \cos(\chi + \dfrac{\pi}{2}) \\ \sin(\chi + \dfrac{\pi}{2})e^{i\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\chi \\ \cos\chi e^{i\phi} \end{pmatrix}$. *Rezultă că*

$\hat{J}'^{+}(\chi,\phi) = \begin{pmatrix} -\sin\chi & \cos\chi e^{-i\phi} \end{pmatrix}$. *Se deduce simplu că*

$\hat{J}^{+}(\chi,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\chi & \sin\chi e^{-i\phi} \end{pmatrix}$

Atunci $\hat{J}'^{+}(\chi,\phi) \cdot \hat{J}(\chi,\phi) = \begin{pmatrix} -\sin\chi & \cos\chi e^{-i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\chi \\ \sin\chi e^{i\phi} \end{pmatrix} = 0$

şi $\hat{J}^{+}(\chi,\phi) \cdot \hat{J}'(\chi,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\chi & \sin\chi e^{-i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\chi \\ \cos\chi e^{i\phi} \end{pmatrix} = 0$