Cristian Vladimirescu

Cristian Vladimirescu

Matematici Speciale

Editura Universitaria
Craiova, 2020

Referenţi ştiinţifici:
Prof.univ.dr. Trandafir Bălan
Prof.univ.dr. Dan Selişteanu

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
VLADIMIRESCU, CRISTIAN
Matematici speciale / Cristian Vladimirescu. - Craiova:
Universitaria, 2020
Conţine bibliografie
ISBN 978-606-14-1666-0
51

Prefaţă

Lucrarea prezentă se adresează în principal studenţilor de la facultăţile cu profil tehnic şi conţine elemente din următoarele domenii ale matematicii:

Analiză complexă,
Ecuaţii diferenţiale ordinare,
Serii Fourier,
Transformata Laplace,
Transformata Fourier,
Transformata Z.

Datorită numeroaselor aplicaţii întâlnite în modelarea matematică a diferitelor fenomene ale lumii reale, aceste capitole s-au bucurat întotdeauna de un interes major.

Parcurgerea acestei cărţi presupune cunoştinţe de Analiză matematică, Algebră liniară, Geometrie analitică şi diferenţială, dobândite în anul I de facultate. Cu toate că lucrarea conţine şi probleme aplicative, pe care nu le regăsim în culegerile de probleme existente, ea nu este însă suficientă pentru cei interesaţi să aprofundeze elementele teoriilor prezentate, recomandându-se astfel şi parcurgerea altor lucrări, unele fiind indicate în secţiunea Bibliografie.

Fiecare capitol prezintă cadrul teoretic de lucru, în care sunt prezentate definiţiile noţiunilor noi, rezultatele şi proprietăţile de bază ale acestora, unele fiind însoţite de demonstraţii complete.

Conceptele şi rezultatele din lucrare sunt ilustrate prin exemple rezolvate în detaliu, pentru o mai bună înţelegere a tuturor aspectelor prezentate.

Rezultatele mai importante sunt indicate cu trei cifre, reprezentând ordinea lor în cadrul diferitelor capitole şi secţiuni, după modelul: Teorema 2.3.5. este a cincea teoremă numerotată în secţiunea a treia a capitolului al doilea. Finalul unei demonstraţii sau al unei soluţii este marcat prin semnul $\square$.

Prin aspectele teoretice studiate, prin exemplele şi prin exerciţiile rezolvate ori propuse spre rezolvare şi prezente în fiecare capitol, cartea reprezintă un instrument util pentru pregătirea în vederea susţinerii diferitelor examene sau concursuri studenţeşti.

Craiova, septembrie 2020 Cristian Vladimirescu

CAPITOLUL 1

Analiză complexă

1. Introducere

Numerele complexe au apărut ca urmare a faptului că nu există niciun număr real x care sa verifice ecuaţia (ori alte ecuaţii similare) $x^2 + 1 = 0$.

Un număr complex este de forma $a + bi$, unde a, b sunt numere reale. a se numeşte *partea reală* a lui x şi b se numeşte *partea imaginară* a lui x, iar $i = \sqrt{-1}$ se numeşte *unitatea imaginară*.

Două numere complexe $a + bi$ şi $c + di$ sunt egale dacă $a = b$ şi $c = d$.

Mulţimea numerelor reale se poate defini ca submulţimea numerelor complexe care au $b = 0$. Numărul complex $0 + 0i$ corespunde numărului real 0, iar $-1 + 0i$ numărului real -1.

Observaţie 1.1.1.

Observaţie 1.1.2. *Operaţiile cu numere complexe se efectuează ca operaţiile cu numere reale, înlocuind, eventual,* i^2 *cu* -1.

Observaţie 1.1.3. *Nu se poate introduce nicio relaţie de ordine* $\leq$ *în mulţimea numerelor complexe, care să fie compatibilă cu structura algebrică. Deci inegalităţile între numere complexe nu se pot defini.*

Din punct de vedere axiomatic, este de preferat ca numerele complexe să fie definite ca perechi ordonate (a, b) de numere reale, ce satisfac anumite proprietăţi echivalente cu cele de mai sus.

Definiţie 1.1.1. *Prin* ***număr complex*** *înţelegm o pereche ordonată de numere reale,* (a, b).

Notăm

$$\mathbb{C} := \{(x, y), \ x, \ y \in \mathbb{R}\},$$

*pe care o numim **mulţimea numerelor complexe.***

Pentru $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, notăm $x := Re\ z$ şi $y := Im\ z$. x, y se numesc ***partea reală***, *respectiv* ***imaginară,*** *ale numărului complex z.*

Definim, pentru $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$, $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$,

$$
\begin{aligned}
z_1 + z_2 &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,, \\
z_1 \cdot z_2 &:= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)\,.
\end{aligned}
$$

Atunci $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ este un corp comutativ, numit ***corpul numerelor complexe****.*

Dacă $z = (x, y)$, atunci $\overline{z} := (x, -y)$ se numeşte ***conjugatul*** *numărului complex z.*

De exemplu, $\overline{-2 + 5i} = -2 - 5i$.

Definiţie 1.1.2. *Două numere complexe sunt egale dacă au părţile reale egale şi părţile imaginare egale.*

Este imediat că

$$z \cdot \overline{z} = \overline{z} \cdot z = \left(x^2 + y^2, 0\right),\ \forall z = (x, y) \in \mathbb{C}.$$

Notăm cu

$$\mathbb{C}_0 := \{(x, 0)\,,\ x \in \mathbb{R}\}\,.$$

Se demonstrează imediat că $(\mathbb{C}_0, +, \cdot)$ este tot corp comutativ. Definind $T : \mathbb{R} \to \mathbb{C}_0$, prin

$$T(x) := (x, 0)\,,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

se arată uşor că T este bijectivă şi

$$
\begin{aligned}
T(x + y) &= T(x) + T(y)\,,\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}, \\
T(x \cdot y) &= T(x) \cdot T(y)\,,\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Deci T este izomorfism de corpuri, iar $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ şi $(\mathbb{C}_0, +, \cdot)$ sunt corpuri izomorfe. Prin urmare, putem identifica mulţimea numerelor reale cu $\mathbb{C}_0$.

Notăm cu $x := (x, 0) \in \mathbb{C}_0$ şi $i := (0, 1) \in \mathbb{C}$. i se numeşte **unitatea imaginară**.

Folosind operaţiile cu numere complexe, orice $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ se poate scrie ca

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + yi.$$

Prin urmare, obţinem forma algebrică a numerelor complexe,

$$(x, y) = x + yi,\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}$$

sau

$$z = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \ i.$$

Observăm că

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1 + 0i = -1,$$

iar dacă $z = x + yi$, atunci conjugatul său este $\overline{z} = x - yi$.

Operaţiile algebrice cu numere complexe se pot formula astfel:

1) *Adunarea*

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2 i);$$

2) *Scăderea*

$$(x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) i;$$

3) *Înmulţirea*

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i;$$

4) *Împărţirea*

Dacă $x_2 \neq 0$ şi $y_2 \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} &= \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} \frac{x_2 - y_2 i}{x_2 - y_2 i} = \frac{x_1 x_2 - y_1 y_2 i^2 + (-x_1 y_2 + x_2 y_1) i}{x_2^2 - y_2^2 i^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{-x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2} i; \end{aligned}$$

5) *Înmulţirea cu un scalar real*

Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $x + yi \in \mathbb{C}$, atunci

$$\alpha (x + yi) = (x + yi) \alpha = \alpha x + \alpha y i.$$

Se poate demonstra imediat că $\mathbb{C}$ înzestrat cu operaţiile de adunare înmulţire a numerelor complexe şi de înmulţire cu un scalar real devine un *spaţiu vectorial real,* şi $\{1, i\}$ este o bază în acest spaţiu şi deci

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2.$$

1.1. Modulul unui număr complex. Modulul numărului complex $z = x + yi$ este prin definiţie numărul real pozitiv

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

De exemplu, $|-2 + 5i| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$.

Proprietăţi ale modulului

1) $|z| \geq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$ şi $|z| = 0$ dacă şi numai dacă $z = 0$;

2) $|\alpha z| = |\alpha| \, |z|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{C}$;

3) (Inegalitatea triunghiului) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
4) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
5) $z\overline{z} = \overline{z}z = |z|^2$, $\forall z \in \mathbb{C}$;
6) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
7) $|z_1 z_2 ... z_n| = |z_1| |z_2| ... |z_n|$, $\forall z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$, de unde obţinem $|z^n| = |z|^n$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}$;
8) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, cu $z_2 \neq 0$;
9) $|z_1 \pm z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
10) $|\text{Re}z| \leq |z| \leq |\text{Re}z| + |\text{Im}z|$ şi $|\text{Im}z| \leq |z| \leq |\text{Re}z| + |\text{Im}z|$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Observaţie 1.1.4. *Datorită proprietăţilor 1)-3),* $|\cdot|$ *este o normă pe* $\mathbb{C}$, *iar spaţiul vectorial* $\mathbb{C}$ *înzestrat cu norma* $|\cdot|$ *este un spaţiu vectorial normat.*

1.2. Proprietăţi algebrice ale numerelor complexe. 1) Pentru orice $z \in \mathbb{C}$, $\text{Re}z = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $\text{Im}z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$;
2) $z \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $\text{Im}z = 0$;
3) $z \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $z = \overline{z}$;
4) $z = 0$ dacă şi numai dacă $\text{Re}z = \text{Im}z = 0$;
5) Oricare ar fi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ şi, dacă, $z_2 \neq 0$, $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

1.3. Reprezentarea geometrică a numerelor complexe. Orice număr complex poate fi reprezentat printr-un singur punct în plan ($\mathbb{R}^2$), numit **imaginea** acelui număr: dacă $z = x + yi \in \mathbb{C}$, atunci imaginea sa geometrică este punctul $M(x, y)$.

Numerele din $\mathbb{C}_0$ se reprezintă pe axa absciselor, pe care-o numim **axa reală**. Numerele pur imaginare (i.e. cele cu $\text{Re}z = 0$) se reprezintă pe axa ordonatelor, pe care-o numim **axa imaginară**.

Reciproc, oricărui punct din plan îi corespunde un unic număr complex, numit **afixul** acelui punct: dacă $M(x, y)$ este un punct în planul $\mathbb{R}^2$, atunci $z = x + yi$ este afixul punctului M. Se mai notează $M(z)$.

Prin urmare, orice număr complex este unic reprezentat de un punct în plan şi reciproc.

Din punct de vedere geometric, imaginea conjugatului este simetricul imaginii numărului complex faţă de axa reală.

1.4. Reprezentarea trigonometrică a numerelor complexe. Fie $z = x + yi \in \mathbb{C}$ şi $M(z)$ punctul din plan de afix z. Vectorul $\overrightarrow{OM}$ este unic determinat de lungimea sa r,

$$r := \sqrt{x^2 + y^2} =: |z|\,,$$

numită şi **modulul numărului** complex z şi de unghiul orientat $\varphi \in [0, 2\pi)$, făcut cu sensul pozitiv al axei Ox, numit şi **argumentul redus** al lui z şi notat cu $\arg z$.

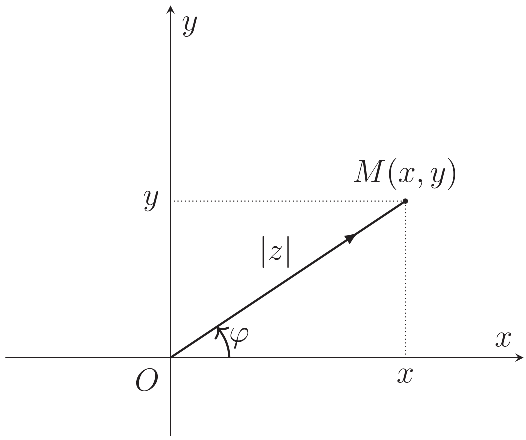

FIGURA 1.1.

Este evident,

$$a = |z| \cos\varphi \text{ şi } b = |z| \sin\varphi.$$

Prin urmare, obţinem **forma trigonometrică** a numărului complex z,

$$z = |z| \left(\cos\varphi + i \sin\varphi\right).$$

Din geometria elementară se deduce imediat următoarea formulă de calcul pentru $\arg z$, unde $z = x + yi$

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \text{ dacă } x > 0,\ y \geq 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, \text{ dacă } x > 0,\ y < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, \text{ dacă } x < 0,\ y \geq 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2\pi, \text{ dacă } x > 0,\ y < 0, \\ \pi/2, \text{ dacă } x = 0,\ y > 0, \\ 3\pi/2, \text{ dacă } x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Numărului complex $z = 0$ nu i se asociază niciun argument, deoarece

$$0 = |0| \left(\cos\varphi + i \sin\varphi\right),\ \forall \varphi \in [0, 2\pi).$$

Mulţimea

$$\operatorname{Arg} z := \{\arg z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

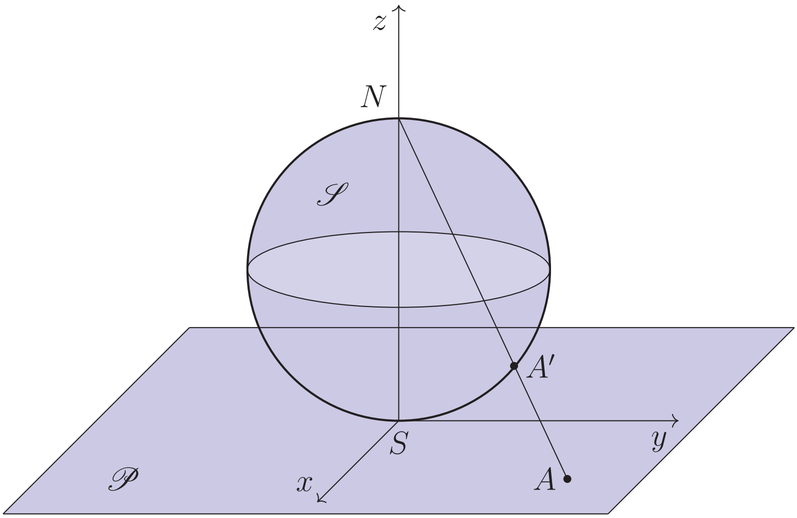

FIGURA 1.2.

se numeşte *mulţimea tuturor argumentelor lui* z.

Se deduce rapid că

$$\arg \overline{z} = 2\pi - \arg z.$$

1.5. Punctul de la infinit. Sfera lui Riemann. Fie $\mathscr{P}$ planul complex şi $\mathscr{S}$ sfera tangentă la $\mathscr{P}$ în punctul de altitudine $z = 0$ (Figura 1.2). Diametrul $[NS]$ este perpendicular pe $\mathscr{P}$ şi punctele N şi S le numim *polul nord*, respectiv *polul sud*.

Corespunzător oricărui punct A din planul $\mathscr{P}$, construim dreapta NA, care intersectează $\mathscr{S}$ în punctul A'. Prin urmare, fiecărui punct din planul complex $\mathscr{P}$ îi corespunde un singur punct pe sfera $\mathscr{S}$ şi deci putem reprezenta orice număr complex printr-un punct de pe sferă.

Şi reciproc, pentru orice punct A' de pe sfera $\mathscr{S}$ construim dreapta NA', care intersectează planul $\mathscr{P}$ în punctul A. Deci fiecărui punct de pe sfera $\mathscr{S}$ îi corespunde un singur punct din planul $\mathscr{P}$ şi, în consecinţă, putem asocia oricărui punct de pe sferă un număr complex.

Observăm că atunci când punctul $A' \in \mathscr{S}$ se apropie de polul nord N, dreapta NA' secantă la sferă tinde spre o tangentă la $\mathscr{S}$ în punctul N, fapt care corespunde în planul $\mathscr{P}$ creşterii distanţei de la A la S sau a modulului afixului punctului A spre $+\infty$. Deci putem afirma că polul nord N corespunde *punctului de la infinit* al planului $\mathscr{P}$, pe care îl vom nota cu ∞. Folosind această metodă, vom considera (în secţiunile despre limite de şiruri complexe, limite de funcţii complexe, puncte singulare) că z tinde spre punctul de la infinit, dacă modulul său tinde la $+\infty$.

Mulţimea tuturor punctelor planului complex, incluzând şi punctul de la infinit se numeşte *planul complex închis* şi se notează cu $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Metoda de mai sus de aplicare a planului $\mathscr{P}$ pe sfera $\mathscr{S}$ se numeşte **proiecţie stereografică**, iar sfera $\mathscr{S}$ se numeşte **sfera lui Riemann**.

De remarcat faptul că atunci când diametrul sferei lui Riemann este egal cu 1, ecuatorul corespunde cercului unitate (de centrul S şi rază 1) al planului complex.

1.6. Operaţii cu numere complexe scrise sub formă trigonometrică. Fie $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ numere complexe, cu $r_2 \neq 0$. Atunci

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right], \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right] \end{aligned}$$

şi are loc *formula lui De Moivre*

$$z^n = r^n \left[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right], \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Cu ajutorul formulei lui de Moivre obţinem că rădăcinile de ordinul $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ale numărului complex $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, i.e. soluţiile ecuaţiei

$$u^n = z$$

sunt

$$u_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \ k \in \{0, 1, ..., n-1\}.$$

1.7. Submulţimi remarcabile ale planului complex. Semiplanul superior închis este mulţimea

$$\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

Semiplanul superior deschis este mulţimea

$$\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Semiplanul inferior închis este mulţimea

$$\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z \leq 0\}.$$

Semiplanul superior deschis este mulţimea

$$\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z < 0\}.$$

Semiplanul drept închis este mulţimea

$$\{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re} z \geq 0\}.$$

Semiplanul drept deschis este mulţimea

$$\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re} z > 0\}.$$

Semiplanul stâng închis este mulţimea

$$\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re} z \leq 0\}.$$

Semiplanul stâng deschis este mulţimea

$$\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re} z < 0\}.$$

Şi, similar, **semiplanul deschis de la dreapta lui** $a \in \mathbb{R}$ este mulţimea

$$\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re} z > a\}$$

etc.

Pentru $z_0 \in \mathbb{C}$ şi $R > 0$, **discul deschis** cu centrul în z_0 de rază R este mulţimea

$$B(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| < R\},$$

discul închis cu centrul în z_0 de rază R este mulţimea

$$B(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| \leq R\},$$

iar **cercul** cu centrul în z_0 de rază R este mulţimea

$$B(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| = R\}.$$

Pentru $z_0 \in \mathbb{C}$ şi $0 < R_1 < R_2$, **coroana circulară deschisă** de centru z_0 şi raze R_1, R_2 este mulţimea

$$B(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C}, R_1 < |z - z_0| < R_2\},$$

coroana circulară închisă de centru z_0 şi raze R_1, R_2 este mulţimea

$$B(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C}, R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2\},$$

coroana circulară deschisă inferior şi închisă superior de centru z_0 şi raze R_1, R_2 este mulţimea

$$B(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C}, R_1 < |z - z_0| \leq R_2\},$$

iar **coroana circulară închisă inferior şi deschisă superior** de centru z_0 şi raze R_1, R_2 este mulţimea

$$B(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C}, R_1 \leq |z - z_0| < R_2\}.$$

OBSERVAŢIE 1.1.5. *Vom mai folosi notaţiile prescurtate* $(\operatorname{Re} z > a)$ *pentru semiplanul deschis de la dreapta lui* a, $(|z - z_0| \leq R)$ *pentru discul închis cu centrul în* z_0*, de rază* R, $(|z - z_0| > R)$ *pentru exteriorul discului închis cu centrul în* z_0*, de rază* R *etc.*

DEFINIŢIE 1.1.3. *O mulţime* $D \subseteq \mathbb{C}$ *se numeşte* ***mulţime mărginită*** *dacă este inclusă într-un disc deschis centrat în origine, i.e., există* $M > 0$*, astfel încât*

$$|z| < M, \ \forall z \in D.$$

1.8. Structura topologică a planului complex. Definim aplicaţia $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$,

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|, \ \forall z_1, \ z_2 \in \mathbb{C}.$$

OBSERVAŢIE 1.1.6. *Se arată uşor că această aplicaţie satisface proprietăţile:*

M1) $d(z_1, z_2) \geq 0$, $\forall z_1, \ z_2 \in \mathbb{C}$ *şi* $d(z_1, z_2) = 0$ *dacă şi numai dacă* $z_1 = z_2$;

M2) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1), \ \forall z_1, \ z_2 \in \mathbb{C}$;

M3) (Inegalitatea triunghiului) $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_1), \ \forall z_1, \ z_2, \ z_3 \in \mathbb{C}$.

Deci d *este o metrică pe* $\mathbb{C}$*, iar mulţimea* $\mathbb{C}$ *înzestrată cu metrica* d *este un spaţiu metric.*

De fapt, aceasta este metrica obişnuită, euclidiană, deoarece, pentru $z_1 = a_1 + ib_1$ *şi* $z_2 = a_2 + ib_2$,

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$

Prin urmare, topologia planului complex coincide cu topologia planului real, $\mathbb{R}^2$.

DEFINIŢIE 1.1.4. *Prin* ***şir de numere complexe*** *înţelegem o funcţie* $z : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $z(n) = z_n \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

z_n *se numeşte* ***termenul general*** *sau de rang* n *al şirului.*

Şirul z *se mai notează* $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

OBSERVAŢIE 1.1.7. *În unele situaţii, mulţimea de indici* n *poate fi o submulţime a lui* $\mathbb{N}$*, pentru care există toţi termenii* z_n.

Conform definiţiei unei mulţimi mărginite, şirul z_n, $n \in \mathbb{N}$ este ***mărginit****, dacă există $M > 0$, astfel încât $|z_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. În caz contrar, şirul se cheamă* ***nemărginit****.*

Cu alte cuvinte, un şir de numere complexe este mărginit, dacă toţi termenii săi se găsesc într-un disc deschis (având centrul în origine).

Definiţie 1.1.5. *$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte* ***şir convergent****, dacă există $z \in \mathbb{C}$, astfel încât $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este* ***convergent la*** *z, adică $\exists z \in \mathbb{C}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N_\varepsilon$,*

$$|z_n - z| < \varepsilon.$$

În caz contrar, şirul se numeşte ***divergent****.*

Se poate arăta, folosind inegalitatea triunghiului, că dacă z există ca în definiţia precedentă, atunci el este unic. În acest caz, z se numeşte **limita şirului** z_n şi se notează

$$z := \lim_{n\to\infty} z_n$$

sau

$$z_n \to z.$$

Teoremă 1.1.1. *Şirul z_n, cu $z_n = x_n + y_n i$, $n \in \mathbb{N}$ este convergent la $z = x + yi$ dacă şi numai dacă y_n este convergent la y şi y_n este convergent la y.*

Cu alte cuvinte, studiul convergenţei şirurilor de numere complexe se realizează prin trecere la componentele sale (şirurile părţilor reale şi imaginare).

Exemplu 1.1.1. *Şirul $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{(-1)^n}{n} i$, $n \in \mathbb{N}^*$ este convergent la* $\mathrm{e} + i \cdot 0 = \mathrm{e}$.

Teoremă 1.1.2. *Dacă $z_n \to z$, atunci $|z_n| \to |z|$.*

Reciproca acestei teoreme este falsă. Într-adevăr, pentru $z_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, şirul modulelor este convergent la 1, însă $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este divergent.

Însă, $z_n \to 0$ dacă şi numai dacă $z = 0$.

Teoremă 1.1.3. *Dacă $|z_n| \to r$ şi $\arg z_n \to \varphi$, atunci $z_n \to r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.*

Reciproca acestei teoreme este falsă, după cum se poate observa prin considerarea şirului $z_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} i$, $n \in \mathbb{N}^*$.

TEOREMĂ 1.1.4. *Dacă* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sunt convergente, atunci*

$$(\alpha z_n + \beta w_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

este convergent, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *şi*

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha z_n + \beta w_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} z_n + \beta \lim_{n\to\infty} w_n.$$

EXERCIŢIU 1.1.1. *Şirul* $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este convergent doar pentru* $z = 1$ *şi* $|z| < 1$.

DEFINIŢIE 1.1.6. *Spunem că* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *are limita* ∞, *dacă* $|z_n| \to +\infty$. *În acest caz, notăm* $z_n \to \infty$.

OBSERVAŢIE 1.1.8. *Dacă* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admite un subşir* $(z_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *cu* $z_{k_n} \to \infty$, *atunci* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este nemărginit.*

TEOREMĂ 1.1.5. *Orice şir convergent este mărginit.*

Deci, pentru a arăta că un şir este divergent, este suficient să demonstrăm că este nemărginit.

DEFINIŢIE 1.1.7. *Şirul* z_n, $n \in \mathbb{N}$ *se numeşte* ***şir Cauchy (fundamental)***, *dacă* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N_\varepsilon$, $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon.$$

OBSERVAŢIE 1.1.9. *Pentru a arăta că un şir este Cauchy, este suficient să arătăm că există un şir* $a_n \to 0$, *astfel încât*

$$|z_{n+p} - z_n| < a_n, \ \forall p \in \mathbb{N} \text{ şi } \forall n \in \mathbb{N} \text{ (sau de la un rang).}$$

TEOREMĂ 1.1.6. *(de completitudine a lui* $\mathbb{C}$*) Un şir de numere complexe este convergent dacă şi numai dacă este Cauchy.*

Deci, $(\mathbb{C}, d)$ este un spaţiu metric complet, iar $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ este un spaţiu Banach.

2. Funcţii complexe

Definiţie 1.2.1. *Orice funcţie* $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *se numeşte* ***funcţie complexă de variabilă complexă***.

Orice funcţie complexă determină în mod unic două funcţii reale, u, $v : D \to \mathbb{R}$, astfel încât, dacă $z = x + iy \in D$, atunci

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x+iy) = \operatorname{Re} f(z) + \operatorname{Im} f(z)\, i \\ &= : u(x,y) + v(x,y)\, i. \end{aligned}$$

Funcţia u se cheamă **partea reală** a lui f şi se notează cu $\operatorname{Re} f$, iar v **partea imaginară**, $v =: \operatorname{Im} f$.

Exemplu 1.2.1. *Pentru* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z\mathrm{e}^z$, *din* $f(x+iy) = (x+iy)e^x(\cos y + i \sin y)$, *se deduce*

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(x,y) &= \mathrm{e}^x (x \cos y - y \sin y), \\ \operatorname{Im} f(x,y) &= \mathrm{e}^x (x \sin y + y \cos y). \end{aligned}$$

Exemplu 1.2.2. *Pentru* $f(z) = \sin z$, *la fel ca în Exemplul 4.2.26, putem determina* $\operatorname{Re} f$ *şi* $\operatorname{Im} f$. *Sau, mai simplu,*

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \sin(iy)\cos x = \sin x \cosh y + i \sinh y \cos x,$$

de unde

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sin(x,y) &= \sin x \cosh y, \\ \operatorname{Im} \sin(x,y) &= \sinh y \cos x. \end{aligned}$$

Pentru acest exemplu, se poate folosi formula $\sin z = \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i}$ şi apoi se determină uşor părţile reală şi imaginară.

Exemplu 1.2.3. *Orice funcţie polinomială,*

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n,\ a_0,\ a_1, ...,\ a_n \in \mathbb{C},$$

şi orice funcţie raţională,

$$f : \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C},\ Q(z) \neq 0\},\ f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

unde P, Q *sunt funcţii polinomiale, reprezintă alte exemple de funcţii complexe.*

Reciproc, orice pereche de funcţii reale de două variabile reale, u, $v : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ determină în mod unic o funcţie complexă, ce are $\operatorname{Re} f = u$ şi $\operatorname{Im} f = v$:

$$f(z) = u(x,y) + v(x,y)\, i = u\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\right) + v\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\right) i.$$

Definiţie 1.2.2. *O funcţie $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se numeşte **funcţie mărginită** dacă imaginea ei $f(D)$ este o mulţime mărginită, i.e., există $M > 0$, astfel încât*

$$|f(z)| < M, \ \forall z \in D.$$

2.1. Exponenţiala complexă. Considerăm în cele ce urmează şirul $z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$, $n \geq 1$, unde $z = x + yi \in \mathbb{C}$ este un număr oarecare.

Avem $|z_n| = \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n = \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}} \to \mathrm{e}^a$.

Apoi, $\forall n \geq 1$,

$$\arg z_n = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y/n}{1+x/n}, \text{ dacă } y \geq 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y/n}{1+x/n} + 2\pi, \text{ dacă } y < 0. \end{cases}$$

Deci, $\forall n \geq 1$,

$$z_n = \begin{cases} |z_n| \left(\cos n \frac{y/n}{1+x/n} + i \sin n \frac{y/n}{1+x/n}\right), \text{ dacă } y \geq 0, \\ |z_n| \left(\cos\left(n \frac{y/n}{1+x/n} + 2n\pi\right) + i \sin\left(n \frac{y/n}{1+x/n} + 2n\pi\right)\right), \text{ dacă } y < 0. \end{cases}$$

De aici se deduce rapid că $z_n \to \mathrm{e}^x (\cos y + i \sin y)$.

Reţinem, aşadar,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a (\cos b + \sin b\ i), \ \forall z = a + bi \in \mathbb{C}. \tag{1.2.1}$$

Plecând de la formula din analiza reală,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \mathrm{e}^z, \ \forall z \in \mathbb{R},$$

considerăm prin extensie definiţia exponenţialei numărului complex z,

$$\mathrm{e}^z := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Folosind această definiţie şi relaţia (1.2.1), obţinem *formula lui Euler*

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x (\cos y + i \sin y), \ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}. \tag{1.2.2}$$

Următoarele proprietăţi ale exponenţialei reale se păstrează în cazul complex:

1) $\mathrm{e}^0 = 1$;

2) $\mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_2} \cdot \mathrm{e}^{z1} = \mathrm{e}^{z_1+z_2}$, $\forall z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$;

3) $(\mathrm{e}^z)^n = e^{nz}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$;

4) $\frac{\mathrm{e}^{z_1}}{\mathrm{e}^{z_2}} = \mathrm{e}^{z_1-z_2}$, $\forall z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$.

În plus, $\mathrm{e}^{2\pi i} = 1$ şi $\mathrm{e}^{2k\pi i} = 1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Prin urmare, ecuaţia $\mathrm{e}^u = 1$ are o infinitate de soluţii, spre deosebire de ecuaţia similară din analiza reală, ce are o unică soluţie, $u = 0$.

Pe de altă parte,

$$\mathrm{e}^{z+2k\pi i} = \mathrm{e}^{2k\pi i+z} = \mathrm{e}^z,\ \forall z \in \mathbb{C},\ \forall k \in \mathbb{Z},$$

de unde deducem că funcţia exponenţială

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \ \exp(z) = \mathrm{e}^z, \forall z \in \mathbb{C}$$

este periodică, de perioadă $2\pi i$.

2.2. Funcţiile sin, cos, sinh, cosh **complexe.** Folosind formula lui Euler, din $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ şi $\mathrm{e}^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$, $\forall\theta \in \mathbb{R}$, deducem

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2},\ \ \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i},\ \ \forall\theta \in \mathbb{R}.$$

Prin extensie la $\mathbb{C}$, definim

$$\cos z := \frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2},\ \ \sin z := \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i},\ \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Apoi

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} z \ &: = \frac{\sin z}{\cos z} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{i\left(\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}\right)},\ \ \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{(2k+1)\,\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} z \ &: = \frac{\cos z}{\sin z} \\ &= \frac{i\left(\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}\right)}{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}},\ \ \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Multe din proprietăţile cunoscute din cazul real ale acestor funcţii se pătrează în cazul complex, de exemplu:

$$\begin{aligned}
\cos^2 z + \sin^2 z &= 1, \\
\cos(-z) &= \cos z, \ \ \sin(-z) = -\sin z \\
\operatorname{tg}\ (-z) &= -\operatorname{tg}\ z, \ \operatorname{ctg}\ (-z) = -\operatorname{ctg}\ z, \\
\cos(z_1 \pm z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2, \\
\sin(z_1 \pm z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2, \\
\operatorname{tg}\ (z_1 \pm z_2) &= \frac{\operatorname{tg}\ z_1 \pm \operatorname{tg}\ z_2}{1 \mp \operatorname{tg}\ z_1 \operatorname{tg}\ \mathrm{z}_2}, \\
\sin(z + 2\pi) &= \sin z, \ \ \cos(z + 2\pi) = \cos z.
\end{aligned}$$

Funcţiile trigonometrice hiperbolice sunt definite respectiv prin

$$\begin{aligned}
\cosh z &:= \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}, \ \sinh z := \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}, \ \forall z \in \mathbb{C}, \\
\operatorname{tgh}\ z &:= \frac{\sinh z}{\cosh z}, \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) i, \ k \in \mathbb{Z} \right\}, \\
\operatorname{ctgh}\ z &:= \frac{\cosh z}{\sinh z}, \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{ k\pi i, \ k \in \mathbb{Z} \},
\end{aligned}$$

obţinând imediat relaţiile

$$\begin{aligned}
\cos iz &= \cosh z, \ \ \cosh iz = \cos z, \\
\sin iz &= i \sinh z, \ \ \sinh iz = i \sin z, \\
\operatorname{tg}\ iz &= i \tanh z, \ \ \tanh iz = i\ \operatorname{tg}\ z, \\
\cosh^2 z - \sinh^2 z &= 1, \\
\cosh(-z) &= \cosh z, \ \ \sinh(-z) = -\sinh z, \\
\cosh(z_1 \pm z_2) &= \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2, \\
\sinh(z_1 \pm z_2) &= \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2, \\
\operatorname{tgh}\ (z_1 \pm z_2) &= \frac{\operatorname{tgh}\ z_1 \pm \operatorname{tgh}\ z_2}{1 \pm \operatorname{tgh}\ z_1 \operatorname{tgh}\ \mathrm{z}_2}.
\end{aligned}$$

2.3. Logaritmul complex. Să considerăm acum ecuaţia $\mathrm{e}^u = z$, unde $z \in \mathbb{C}^*$. Se demonstrează, prin dublă incluziune, egalitatea de mulţimi

$$\{u \in \mathbb{C}, \mathrm{e}^u = z\} = \{\ln|z| + i \arg z + 2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

sau, considerând mulţimea tuturor argumentelor lui z, *funcţia multivocă logaritm complex*, $\ln : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathscr{P}(\mathbb{C})$,

$$\ln z := \ln|z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Funcţia logartitm complex este multivocă, deoarece imaginea unui număr complex prin această funcţie este o mulţime de numere complexe (nu este formată dintr-un singur element, ca în cazul funcţiilor uzuale, univoce).

Însă este evident că pentru fiecare valoare a lui $k \in \mathbb{Z}$, se obţine câte o funcţie univocă

$$\ln|z| + i\arg z + 2k\pi i$$

şi toate aceste funcţii univoce se cheamă **ramuri ale funcţiei complexe** $\ln z$.

De regulă în aplicaţii se consideră acea ramură a lui $\ln z$, obţinută pentru $k = 0$, i.e. $\log : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$,

$$\log z := \ln|z| + i\arg z,$$

ramură care se mai numeşte **ramura principală** a logaritmului complex. Ramura principală este de fapt acea ramură a lui ln, care verifică proprietatea

$$\ln 1 = 0.$$

2.4. Funcţii trigonometrice inverse. Dacă $z = \sin w$, atunci $w = \sin^{-1} z$ se numeşte arcsin-ul lui şi se notează cu $\arcsin z$. Anlog se definesc funcţile arccos, arctg, arcctg etc. Funcţiile trigonometrice inverse sunt multivoce şi se pot exprima în funcţie de logartimul complex astfel:

$$\begin{aligned}
\arcsin z &= \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right),\\
\arccos z &= \frac{1}{i}\ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right),\\
\operatorname{arctg} z &= \frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz}.
\end{aligned}$$

La fel se pot defini şi funcţiile trigonometrice hiperbolice inverse:

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcsinh} z &= \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right),\\
\operatorname{arccosh} z &= \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right),\\
\operatorname{arctgh} z &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}.
\end{aligned}$$

2.5. Funcţia putere complexă. Definim, pentru $\alpha \in \mathbb{R}^*$ şi $z \in \mathbb{C}^*$,

$$z^\alpha := \mathrm{e}^{\alpha \ln z} = |z|^\alpha \, \mathrm{e}^{i\alpha \operatorname{Arg} z} = \left\{ |z|^\alpha \, \mathrm{e}^{i\alpha(\arg z + 2k\pi)}, \; k \in \mathbb{Z} \right\},$$

având ramura principală ($k = 0$)

$$z^\alpha := |z|^\alpha \, \mathrm{e}^{i\alpha \arg z},$$

şi, în particular, funcţia radical de ordinul $n \geq 2$,

$$\sqrt[n]{z} := \sqrt[n]{|z|} \mathrm{e}^{i \frac{\operatorname{Arg} z}{n}} = \left\{ \sqrt[n]{|z|} \mathrm{e}^{i \frac{(\arg z + 2k\pi)}{n}}, \; k \in \mathbb{Z} \right\},$$

cu ramura principală ($k = 0$)

$$\sqrt[n]{z} := \sqrt[n]{|z|} \mathrm{e}^{i \frac{\arg z}{n}}.$$

În acelaşi mod se poate defini şi funcţia

$$f(z)^{g(z)} := \mathrm{e}^{g(z) \ln f(z)}.$$

Toate aceste funcţii cu putere complexă sunt funcţii multivoce.

3. Limite de funcţii

3.1. Noţiuni şi rezultate topologice. Prezentăm mai întâi câteva noţiuni şi rezultate de natură topologică, pe care le vom utiliza pe parcursul acestui capitol.

DEFINIŢIE 1.3.1. *Mulţimea $V \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte* ***vecinătate a punctului*** *$z_0 \in \mathbb{C}$, dacă ea conţine un disc deschis centrat în z_0, i.e. $\exists r > 0$, astfel încât*

$$B(z_0, r) \subseteq V.$$

DEFINIŢIE 1.3.2. *Mulţimea $V \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte* ***vecinătate a punctului de la infinit*** *∞, dacă ea conţine exteriorul unui disc închis centrat în 0, i.e. $\exists r > 0$, astfel încât dacă $|z| > r$, atunci $z \in V$ sau, echivalent, $\mathbb{C} \setminus \overline{B(0, r)} \subseteq V$.*

DEFINIŢIE 1.3.3. *Un punct z_0 se numeşte* ***punct limită*** *sau* ***punct de acumulare*** *al mulţimii A dacă în fiecare vecinătate a lui z_0 există puncte din A, diferite de z_0.*

Mulţimea tuturor punctelor de acumulare ale mulţimii A se notează de regulă cu A'.

DEFINIŢIE 1.3.4. *O mulţime $A \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte* ***mulţime deschisă****, dacă ea este vecinătate pentru fiecare punct al ei, i.e.,* $\forall z_0 \in A$, $\exists R > 0$, $B(z_0, R) \subseteq A$.

DEFINIŢIE 1.3.5. *Mulţimea $A \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte* ***mulţime închisă*** *dacă nu este mulţime deschisă sau, echivalent, orice punct de acumularea al lui A este conţinut în A, i.e., $A' \subseteq A$.*

DEFINIŢIE 1.3.6. *Mulţimea $A \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte* ***mulţime mărginită*** *dacă există $M > 0$, astfel încât*

$$|z| < M, \ \forall z \in A$$

(sau, echivalent, dacă ea este conţinută într-un disc deschis).

Dacă mulţimea A nu este mărginită, ea se numeşte ***nemărginită****.*

DEFINIŢIE 1.3.7. *O mulţime închisă şi mărgintă se numeşte* ***mulţime compactă****.*

DEFINIŢIE 1.3.8. *$z_0 \in \mathbb{C}$ se numeşte* ***punct interior*** *mulţimii A, dacă există un disc deschis centrat în z_0 şi inclus în A, i.e.* $\exists R > 0$, $B(z_0, R) \subseteq A$. *Mulţimea tututor punctelor interioare mulţimii A se numeşte* ***interiorul mulţimii*** *A şi se notează $Int(A)$.*

Dacă orice vecinătate a lui z_0 conţine puncte din A şi din $\mathbb{C} \setminus A$, atunci z_0 se numeşte ***punct frontieră*** *al mulţimii A. Mulţimea tututor punctelor interioare mulţimii A se numeşte* ***frontiera mulţimii*** *A şi se notează ∂A.*

DEFINIŢIE 1.3.9. *Un punct care nu este nici punct interior, nici punct frontieră al unei mulţimi, se numeşte* ***punct exterior*** *acelei mulţimi. Mulţimea tututor punctelor exterioare mulţimii A se numeşte* ***exteriorul mulţimii*** *A şi se notează $Ext(A)$.*

OBSERVAŢIE 1.3.1. *O mulţime este deschisă dacă şi numai dacă este egală cu interiorul său, i.e., $A = Int(A)$.*

DEFINIŢIE 1.3.10. *Mulţimea A se numeşte* ***conexă (conexă prin arce)*** *dacă $\forall z_1$, $z_2 \in A$, există un drum situat în A, care uneşte cele două puncte.*

DEFINIŢIE 1.3.11. *O mulţime deschisă şi conexă se numeşte* ***domeniu****.*

DEFINIŢIE 1.3.12. *Mulţimea A se numeşte* ***convexă*** *dacă odată cu două puncte conţine segmentul de dreaptă ce le uneşte, i.e.,*

$$\forall z_1,\ z_2 \in A,\ \ \{(1-t)\, z_1 + tz_2,\ t \in [0,1]\} \subseteq A.$$

DEFINIŢIE 1.3.13. *Mulţimea A se numeşte* ***stelată*** *dacă $\exists z_0 \in A$, astfel încât $\forall z \in A$, segmentul ce uneşte z_0 cu z este conţinut în A, i.e.,*

$$\exists z_0 \in A,\ \forall z \in A,\ \ \{(1-t)\, z_0 + tz,\ t \in [0,1]\} \subseteq A.$$

DEFINIŢIE 1.3.14. ***Închiderea*** *sau* ***aderenţa*** *mulţimii A este mulţimea $\overline{A} = A \cup A'$.*

OBSERVAŢIE 1.3.2. *Muţimea A este închisă dacă şi numai dacă $A = \overline{A}$.*

TEOREMĂ 1.3.1. *(Bolzano-Weierstrass) Orice mulţime infinită are cel puţin un punct de acumulare.*

TEOREMĂ 1.3.2. *(Heine-Borel) Mulţimea A este compactă dacă şi numai dacă din orice acoperire a lui cu mulţimi deschise, există o subacoperire finită, i.e. dacă $A \subseteq \cup_k A_k$, A_k mulţimi deschise, există A_1, A_2, ..., A_n, astfel încât*

$$A \subseteq \cup_{k=1}^{n} A_k.$$

3.2. Limite de funcţii.

DEFINIŢIE 1.3.15. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ şi $z_0 \in \mathbb{C} \cap D'$. Spunem că* ***funcţia*** *f* ***are limita*** *$w_0 \in \mathbb{C}$* ***în*** *z_0, dacă oricare ar fi V o vecinătate a lui w_0, există U vecinătate a lui z_0, astfel încât $f(U) \subseteq V$ sau, echivalent, $\forall z \in U$, rezultă $f(z) \in V$.*

Această definiţie este echivalentă de fapt cu următoarea

DEFINIŢIE 1.3.16. *Funcţia f are limita $w_0 \in C$ în z_0, dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall z \in D \setminus \{z_0\}$ cu $|z - z_0| < \delta$, avem*

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

OBSERVAŢIE 1.3.3. *Limita unei funcţii într-un punct, dacă există, este unică şi se notează*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0.$$

3.3. Limita la ∞. Folosind schimbarea de variabilă (transformare) $w = \frac{1}{z}$, punctul de la infinit în planul variabilei z se transformă în punctul $w = 0$ în planul variabilei w şi reciproc. Prin urmare, pentru a studia limita funcţiei f în punctul de la infinit, $z = \infty$, efectuăm schimbarea de variabilă $z = \frac{1}{w}$ şi calculăm limita funcţiei $f\left(\frac{1}{w}\right)$ în punctul $w = 0$.

DEFINIŢIE 1.3.17. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie, unde D conţine exteriorul unui disc centrat în origine $(|z| > r)$. Spunem că funcţia f are **limita** $w_0 \in \mathbb{C}$ la ∞, dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall z \in D$ cu $|z| > \delta$, avem*

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

OBSERVAŢIE 1.3.4. *Limita funcţiei f în punctul de la infinit, dacă există, este unică şi notăm*

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = w_0.$$

DEFINIŢIE 1.3.18. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie şi $z_0 \in \mathbb{C} \cap D'$. Spunem că funcţia f are **limita** ∞ **în punctul** $z = z_0$ şi notăm $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$, dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall z \in D \setminus \{z_0\}$ cu $|z - z_0| < \delta$, avem*

$$|f(z)| > \varepsilon.$$

DEFINIŢIE 1.3.19. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie, unde D conţine exteriorul unui disc centrat în origine $(|z| > r)$. Spunem că funcţia f are **limita** ∞ **la** ∞ şi notăm*

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty,$$

dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall z \in D$ cu $|z| > \delta$, avem

$$|f(z)| > \varepsilon.$$

TEOREMĂ 1.3.3. *Dacă* $z_0 = x_0 + y_0 i$ *şi* $w_0 = u_0 + v_0 i$, $f = u + vi : D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D'$, *atunci*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

dacă şi numai dacă

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$$

şi

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0.$$

Deci, studiul limitelor funcţiilor complexe se reduce la studiul limitelor funcţiilor reale, prin trecere la componente. Prin urmare, toate operaţiile şi proprietăţile limitelor de funcţii din analiza reală se păstrează în cazul complex. Printre acestea, enumerăm următoarele.

Presupunem că $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_1$, $\lim_{z \to z_0} g(z) = w_2$ şi $\alpha \in \mathbb{C}$. Atunci:

1) $\lim_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] = w_1 + w_2$;
2) $\lim_{z \to z_0} [f(z) - g(z)] = w_1 - w_2$;
3) $\lim_{z \to z_0} f(z) g(z) = w_1 w_2$;
4) $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w_1}{w_2}$;
5) $\lim_{z \to z_0} (\alpha f)(z) = \alpha w_1$.

TEOREMĂ 1.3.4. $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ *dacă şi numai dacă*

$$\lim_{|z - z_0| \to 0} |f(z) - w_0| = 0.$$

TEOREMĂ 1.3.5. *(Criteriul lui Heine, cu şiruri)* $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ *dacă şi numai dacă* $\forall (z_n)_n \subset D \setminus \{z_0\}$, $z_n \to z_0$, *avem* $f(z_n) \to w_0$.

EXEMPLU 1.3.1. $\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$; $\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$; $\lim_{z \to 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1}{2}$.

4. Continuitate

DEFINIŢIE 1.4.1. *Fie* $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *o funcţie şi* $z_0 \in D \cap D'$. *Spunem că funcţia* f *este* ***continuă în punctul*** z_0 *dacă*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Funcţia f este ***continuă pe mulţimea*** *D dacă este continuă în fiecare punct din D.*

TEOREMĂ 1.4.1. *Dacă $z_0 = x_0 + y_0 i$ şi $f(z_0) = u_0 + v_0 i$, $f = u + vi : D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D'$, atunci*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

dacă şi numai dacă

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$$

şi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0.$$

Deci şi studiul continuităţii funcţiilor complexe se reduce la studiul continuităţii funcţiilor reale, prin trecere la componente. Şi toate operaţiile şi proprietăţile de continuitate a funcţiilor din analiza reală se păstrează în cazul complex. Printre acestea, enumerăm următoarele.

Presupunem că funcţiile f şi g sunt continue în z_0, iar $\alpha \in \mathbb{C}$ Atunci:
1) $f + g$ este continuă în z_0 şi $\lim_{z\to z_0} [f(z) + g(z)] = f(z_0) + g(z_0)$;
2) $f - g$ este continuă în z_0 şi $\lim_{z\to z_0} [f(z) - g(z)] = f(z_0) - g(z_0)$;
3) fg este continuă în z_0 şi $\lim_{z\to z_0} f(z)\, g(z) = f(z_0)\, g(z_0)$;
4) $\frac{f}{g}$ este continuă în z_0 dacă $g(z_0) \neq 0$ şi $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g(z_0)}$;
5) αf este continuă în z_0 şi $\lim_{z\to z_0} (\alpha f)(z) = \alpha \lim_{z\to z_0} f(z)$.

TEOREMĂ 1.4.2. $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ *dacă şi numai dacă*

$$\lim_{|z-z_0|\to 0} |f(z) - f(z_0)| = 0.$$

TEOREMĂ 1.4.3. *(Criteriul lui Heine, cu şiruri) f este continuă în z_0 dacă şi numai dacă $\forall (z_n)_n \subset D$, $z_n \to z_0$, avem $f(z_n) \to f(z_0)$.*

5. Derivabilitate complexă. Relaţiile Cauchy-Riemann

Fie f o funcţie (univocă) definită pe mulţimea $D \subseteq \mathbb{C}$ şi $z_0 \in D \cap D'$.

DEFINIŢIE 1.5.1. *Spunem că funcţia f este* ***derivabilă în punctul*** *z_0, dacă există limita*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}.$$

În acest caz notăm

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

şi o numim ***derivata funcţiei*** f ***în punctul*** z_0.

DEFINIŢIE 1.5.2. *Funcţia* f *se numeşte* ***derivabilă pe mulţimea*** D, *dacă este derivabilă în fiecare punct* $z_0 \in D$. *Dacă* D *este un domeniu, atunci* f *se numeşte* ***olomorfă*** *pe* D.

DEFINIŢIE 1.5.3. *Funcţia* f *se numeşte* ***derivabilă de două ori în punctul*** $z_0 \in D$, f *şi* f' *sunt derivabile pe o vecinătate a lui şi există limita*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f'(z) - f'(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}.$$

În acest caz notăm

$$f''(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z) - f'(z_0)}{z - z_0}$$

şi o numim ***derivata a doua a funcţiei*** f ***în punctul*** z_0. f *se numeşte* ***derivabilă de două ori pe mulţimea*** D, *dacă este derivabilă de două ori în orice punct* $z_0 \in D$.

Analog se defineşte noţiunea de ***funcţie derivabilă*** n ***ori*** $(n \geq 3)$, ***derivata de ordin*** n *notându-se cu* $f^{(n)}$.

DEFINIŢIE 1.5.4. *Funcţia* f *se numeşte de* ***clasă*** C^0 *pe mulţimea* D *şi notăm* $f \in C^0(D)$, *dacă* f *este continuă pe* D. *Funcţia* f *se numeşte de* ***clasă*** C^n *pe mulţimea* D *şi notăm* $f \in C^n(D)$ $(n \geq 1)$, *dacă* f *este derivabilă de* n *ori pe* D *şi* $f^{(n)}$ *este continuă pe* D. *Funcţia* f *se numeşte de* ***clasă*** C^∞ *pe mulţimea* D *şi notăm* $f \in C^\infty(D)$, *dacă este derivabilă de orice număr de ori pe mulţimea* D.

OBSERVAŢIE 1.5.1. *Ca în analiza reală, derivata de ordin* 0 *a funcţiei* f *este, prin convenţie, funcţia însăşi,* $f^{(0)} = f$.

Avem şi pentru derivabilitate un criteriu cu şiruri.

TEOREMĂ 1.5.1. *(Criteriul lui Heine, cu şiruri)* f *este derivabilă în* z_0

dacă şi numai dacă $\forall\left(z_n\right)_n \subset D$, $z_n \to z_0$, *există limita*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(z_n\right) - f\left(z_0\right)}{z_n - z_0} \in \mathbb{C}.$$

În acest caz

$$f'\left(z_0\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(z_n\right) - f\left(z_0\right)}{z_n - z_0}.$$

Regulile cunoscute de derivare din analiza reală se păstrează în cazul variabilelor complexe. Dacă f, g sunt derivabile în punctul z şi $c \in \mathbb{C}$ este o constantă, atunci au loc următoarele proprietăţi.

1) $(c)' = 0$;
2) $\left[f(z) \pm g(z)\right]' = f'(z) \pm g'(z)$;
3) $\left[f(z)\, g(z)\right]' = f'(z)\, g(z) + f(z)\, g'(z)$;
4) $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$;
5) $\left[f(g(z))\right]' = f'(g(z))\, g'(z)$.

De asemenea,

$$\begin{aligned}
\left(z^n\right)' &= nz^{n-1},\ \forall n \in \mathbb{N},\\
\left[\left(g(z)\right)^n\right]' &= n\left[g(x)\right]^{n-1} g'(z),\ \forall n \in \mathbb{N},\\
\left(\frac{1}{z^n}\right)' &= -\frac{n}{z^{n-1}},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\\
\left(\frac{1}{\left[g(z)\right]^n}\right)' &= -\frac{ng'(z)}{\left[g(z)\right]^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall z \in \mathbb{C}, \text{ cu } g(z) \neq 0,\\
\left(\mathrm{e}^z\right)' &= \mathrm{e}^z,\ \forall z \in \mathbb{C},\\
(\sin z)' &= \cos z,\ (\cos z)' = -\sin z,\\
(\sinh z)' &= \cosh z,\ (\cosh z)' = \sinh z.
\end{aligned}$$

Prin urmare, orice funcţie polinomială este derivabilă pe $\mathbb{C}$. Cum $\mathbb{C}$ este domeniu, funcţiile polinomiale sunt olomorfe pe $\mathbb{C}$.

Exemplu 1.5.1. *Calculaţi* $f'(z)$, *dacă: a)* $f(z) = 4z^3 - 2z^2 - 5z + 3$; *b)* $f(z) = \frac{z^3}{z^2+2}$; *c)* $f(z) = \left(2z^2 - 3iz\right)^3$.

Soluţie. a) $12z^2 - 4z - 5$; b) $\frac{z^2\left(z^2+6\right)}{\left(z^2+2\right)^2}$; c) $48z^5 - 180iz^4 - 216z^3 + 81iz^2$.

$\square$