Cristina POPÎRLAN

UNIVERSITATEA DIN CRAIOVA

Centrul de Cercetare în Inteligență Aplicată – „Nicolae Țăndăreanu”
Research Center for Applied Intelligence – „Nicolae Țăndăreanu”
www.rcai.eu

Colecția « Computer Science »

Inițiată în 2001, sub egida Centrului de Cercetare în Inteligență Aplicată – „Nicolae Țăndăreanu”, colecția „Computer Science” reunește contribuții valoroase – publicații științifice de înaltă ținută, studii, teze de doctorat, etc. – continuând astfel tradiția publicării în volum separat a seriei 100 (lucrările conferinței anuale AIDC – Artificial Intelligence and Digital Communications), a seriei 200 (Computer Science Fundamentals) și a seriei 300 (Research Reports in Artificial Intelligence).

Rămânând fidelă misiunii sale de dezvoltare și promovare a cunoașterii în domeniul științei calculatoarelor și a tehnologiilor digitale, colecția „Computer Science” reprezintă o sursă reală de informare și își propune lărgirea spectrului publicistic prin dezvoltarea de noi serii tematice.

Propunerile pentru publicare se vor adresa comitetului științific la adresa: office@rcai.eu

Cristina POPÎRLAN

Calcul numeric: algoritmi fundamentali

Editura UNIVERSITARIA
Craiova, 2019

Referenți științifici:

Prof. univ. dr. Daniela Dănciulescu
Conf. univ. dr. Dumitru Ebâncă

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
POPÎRLAN, CRISTINA
Calcul numeric: algoritmi fundamentali / Cristina Popîrlan. - Craiova: Universitaria, 2019
Conţine bibliografie
ISBN 978-606-14-1565-6

51

Lista de Algoritmi

1 Metoda lui Newton pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii . . . 21

2 Metoda lui Newton pentru sisteme de ecuaţii (v. 2) 23

3 Metoda lui Newton pentru sisteme de ecuaţii (v. 3) 25

4 Metoda lui Newton pentru rezolvarea ecuaţiilor 28

5 Metoda lui Newton pentru calculul lui $\sqrt[p]{a}$ 30

6 Metoda secantei pentru ecuaţia $f(x) = 0$ 32

7 Metoda aproximaţiilor succesive pentru sisteme de ecuaţii . . . 35

8 Metoda aproximaţiilor succesive pentru ecuaţia $x = f(x)$ 36

9 Metoda lui Bairstow 41

10 Metoda lui Bernoulli 47

11 Procedură de triangularizare a unei matrice A 52

12 Procedură de triangularizare a unei matrice folosind pivotarea parţială 54

13 Procedură de triangularizare a unei matrice folosind pivotarea totală 55

14 Factorizare LR pentru o matrice A 57

15 Factorizare Doolittle pentru o matrice A 59

16 Factorizare Crout pentru o matrice A 60

17 Factorizare *LR* cu pivotări parţiale 62

18 Factorizare *LR* cu pivotări totale 64

19 Factorizare *QR* a unei matrice *A* 72

20 Calculul determinanţilor cu metoda condensării pivotale 77

21 Metoda lui Gauss pentru inversarea matricelor 81

22 Calculul inversei unei matrice *A* după realizarea unei factorizări *QR* 86

23 Metoda iterativă pentru calculul inversei unei matrice *A* 90

24 Metoda lui Leverrier 99

25 Metoda lui Fadeev 101

26 Metoda lui Krîlov 104

27 Metoda lui Jacobi pentru calculul valorilor şi vectorilor proprii pentru o matrice simetrică *A* 111

28 Metoda puterii pentru calculul valorii proprii maxime în valoare absolută pentru o matrice *A* 118

29 Metoda *LR* pentru calculul valorilor şi vectorilor proprii pentru o matrice *A* 123

30 Metode directe pentru sisteme liniare bazate pe proceduri de triangularizare 132

31 Metode directe pentru sisteme liniare bazate pe proceduri de triangularizare (v. 2) 134

32 Metode directe de rezolvare a sistemelor liniare bazate pe proceduri de factorizare *LR* 139

33 Metode directe de rezolvare a sistemelor liniare bazate pe proceduri de factorizare *LR* cu pivotări totale 140
34 Metode directe de rezolvare a sistemelor liniare bazate pe proceduri de factorizare *QR* 143
35 Metoda Seidel-Gauss 148
36 Metoda Jacobi 150
37 Metoda relaxării 154

Capitolul 1

Prefaţă

Obiectul analizei numerice îl reprezintă găsirea unor metode de aproximare eficientă a soluţiilor problemelor care pot fi exprimate prin modele matematice, eficienţă ce depinde de precizia cerută pentru rezultate şi de uşurinţa implementării. Analiza numerică este una dintre disciplinele matematice ce depinde în cea mai mare măsură de calculatorul numeric.

Metodele numerice reprezintă tehnici prin care problemele matematice sunt reformulate astfel încât să fie rezolvate numai prin operaţii aritmetice. Prin trecerea de la infinit la finit, neliniar la liniar problemele complicate sunt înlocuite de probleme mai simple care au aproape aceeaşi soluţie. Astfel soluţiile obţinute prin aplicarea metodelor numerice reprezintă doar aproximaţii ale soluţiilor problemelor originale.

Etapele ce trebuie parcurse pentru rezolvarea unei probleme cu ajutorul calculatorului constă în:

- stabilirea unui model matematic al problemei concrete (ecuaţie neliniară, sistem de ecuaţii liniare sau neliniare);

- soluţia problemei discretizate trebuie să fie consistentă şi stabilă;
- modelul discretizat trebuie transpus într-un algoritm realizabil şi eficient, descris într-un limbaj de programare evoluat.

Metoda numerică trebuie aleasă ţinând seama de convergenţă, stabilitate, propagarea erorilor şi de analiza complexităţii algoritmului asociat.

Lucrarea de faţă este construită pe structura cursului de Calcul numeric, predat de autoare la Facultatea de Ştiinţe a Universităţii din Craiova. Cartea prezintă metodele de rezolvare a problemelor fundamentale de calcul numeric, care constituie principalele componente ale celor mai diverse aplicaţii din inginerie, economie şi numeroase alte ramuri ale ştiinţei. În afara studenţilor, lucrarea poate fi utilă tuturor celor care doresc să utilizeze cele mai moderne instrumente de calcul numeric.

Scopul principal al acestei cărţi este de a da o descriere şi o analiză relativ completă a celor mai importante metode de calcul numeric utilizate în rezolvarea problemelor de algebră liniară şi neliniară, metode adaptate la performanţele spectaculoase ale computerelor actuale.

Lucrarea de faţă este structurată în 5 capitole, descrise în câteva cuvinte mai jos.

În capitolul 2 prezentăm metode de calcul numeric utilizate pentru aproximarea soluţiilor ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii neliniare: metoda lui Newton şi metoda aproximaţiilor succesive. Capitolul continuă cu descrierea câtorva metode de calcul numeric specifice ecuaţiilor algebrice: metodele Bairstow şi Bernoulli.

Capitolului 3 prezentăm metodele de calcul numeric pentru triangularizarea şi factorizarea (*LR*, *QR*) matricelor; metode ce ulterior vor fi folosite pentru obţinerea metodelor directe de rezolvare a sistemelor liniare şi a unor metode pentru calculul determinanţilor şi inversarea matricelor.

Tot în cadrul acestui capitol sunt prezentate şi metode de calcul numeric pentru determinarea polinomului caracteristic, a vectorilor şi valorilor proprii astfel:

- metode pentru determinarea polinomului caracteristic: metoda minorilor diagonali şi metoda lui Fadeev;

- metode pentru determinarea polinomului caracteristic şi a vectorilor proprii: metodele Krîlov;

- metode pentru aproximarea valorilor şi vectorilor proprii pentru matrice oarecare: metoda puterii, metodele *LR* şi *QR*.

În capitolul 4 sunt prezentate metode directe de rezolvare a sistemelor liniare (metode obţinute prin proceduri de triangularizare şi factorizare) şi metode iterative de rezolvare a sistemelor liniare (Seidel-Gauss, Jacobi şi metoda relaxării).

Metodele de calcul numeric prezentate în această lucrare sunt însoţite de algoritmi descrişi în pseudocod, permiţând astfel cititorilor, cu cunoştinţe în domeniul limbajelor de programare, implementarea acestora într-un limbaj de programare şi rezolvarea cu ajutorul computerului a problemelor algebrice.

Carte se adresează studenţilor de la specializările de informatică, matematică-informatică, matematică, studenţilor de la facultăţile tehnice. În acelaşi timp, această carte poate fi utilă specialiştilor (ingineri, fizicieni, chimişti, biologi, economişti) care au cunoştinţe despre metodele de calcul numeric şi le pot folosi pentru a rezolva cu computerul probleme de matematică din activitatea curentă.

Capitolul 2

Rezolvarea ecuaţiilor şi sistemelor neliniare

2.1 Noţiuni introductive

În acest capitol sunt prezentate câteva metode de rezolvare a ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii neliniare. În prima parte a capitolului sunt prezentate metode generale de rezolvare a ecuaţiilor şi sistemelor neliniare (metoda lui Newton, metoda aproximaţiilor succesive), iar în partea a doua sunt descrise metode specifice de rezolvare a ecuaţiilor algebrice (metodele Bairstow şi Bernoulli).

Se doreşte rezolvarea problema de găsira a rădăcinilor reale ale unei funcţii $F(x)$, definită pe un interval $[a, b]$, adică a valorilor variabilei x pentru care are loc relaţia:

$$F(x) = 0, x \in [a, b].$$

Dacă $F(x)$ este o funcţie liniară, atunci problema ce trebuie rezolvată este banală şi admite o soluţie analitică. Prin urmare, vom presupune în continuare că $F(x)$ este neliniară.

Prima etapă în rezolvarea ecuaţiei este căutarea rădăcinilor pentru care se folosesc rezultate din analiza matematică. După determinarea intervalelor în care se află rădăcini, se trece la etapa de restrângere a acestor intervale.

Metodele uzuale de rezolvare a ecuaţiei construiesc un şir de aproximaţii $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ce tinde către o rădăcină x^*. În analiza acestor metode este util să se stabilească o modalitate de stabilire a rapidităţii cu care şirul de aproximaţii tinde la limită.

Spunem că şirul $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge liniar către x^* dacă există

$$q < 1,\ n_q \in \mathbb{N}$$

astfel încât

$$|x_{n+1} - x^*| \leq q|x_n - x^*|,\ n > n_q.$$

Spunem că şirul $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge pătratic către x^* dacă există

$$C,\ n_C \in \mathbb{N}$$

astfel încât

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^2,\ n > n_C.$$