RACILĂ M IHAELA

RACILĂ MIHAELA

METODE NUMERICE PENTRU STUDENȚII AUTOMATIȘTI

Editura Universitaria
Craiova, 2020

Referenţi:
Prof. univ. dr. ing. Dan Popescu
Conf. univ. dr. mat. Dana Constantinescu

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
RACILĂ, MIHAELA
Metode numerice pentru studenţii automatişti / Mihaela Racilă. - Craiova: Universitaria, 2020
Conţine bibliografie
ISBN 978-606-14-1629-5
51
004

"Teaching is something I do with students,

not something I do to them".

Grunert O'Brien, Millis & Cohen

Prefata

Aproximarea numerică este una dintre cele mai utilizate metode de rezolvare a unei probleme complexe, ea preocupând de-a lungul timpului numeroși matematicieni, ce și-au legat numele de o serie de metode consacrate folosite, și de obținerea unor algoritmi, în vederea implementării acestora în diverse programe pentru calculator. În ultimele decenii, metodele numerice s-au dezvoltat foarte mult, ceea ce a permis rezolvarea unor probleme inginerești de mare complexitate într-un timp foarte scurt și cu o precizie foarte bună.

Acest material este un suport de curs și se adresează studenților de la Facultatea de Automatică, Calculatoare și Electronică a Universității din Craiova, ce urmează cursul de ***Metode Numerice.*** El este conceput în special pentru studenții de la specializările de *Ingineria Sistemelor* (Automatică și Informatică Aplicată, Ingineria Sistemelor Multimedia), precum și *Mecatronică - Robotică,* dar poate fi utilizat și de studenții ce urmează cursurile altor specializări de inginerie.

Obiectul acestui manual este acela de a propune o explicație succintă a conceptelor predate la curs. Numeroase cărți de Metode Numerice există la momentul actual. S-a căutat aici, ținând cont de constrângerile volumului orar, de cunoștințele studenților din primul an de studiu, dar și de exigențele disciplinelor din anii superiori, a se pune bazele "cunoștințelor numerice” necesare, în scopul asigurării unui studiu individual cât mai productiv al studenților, precum și facilitarea lecturii altor materiale de specialitate.

Structurat în 3 părţi - 8 capitole, materialul permite abordarea unor probleme numerice diverse, necesare oricărui viitor inginer, precum metode exacte și aproximative de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare și neliniare, metode de determinare a valorilor și vectorilor proprii ai unei matrice, interpolarea polinomială și cu funcții spline, derivarea și integrarea numerică, metode de rezolvare a ecuațiilor diferențiale ordinare. Partea a treia cuprinde o recapitulare rapidă şi eficientă pentru examenul semestrial, cu fişe de metodă corespunzătoare metodelor studiate, câteva *modele* de subiecte pentru examen, dar şi subiecte date anterior la examen, toate acestea în vederea pregătirii cât mai eficiente a examenului final la disciplina *Metode Numerice*.

Manualul este conceput pentru un curs de un semestru: 14 cursuri de 2 ore și 14 laboratoare de 2 ore. Prin prezența exercițiilor propuse spre rezolvare la finalul fiecărui capitol/paragraf, se dorește evitarea "sindromului paginii albe" și "forțarea" stăpânirii mecanismelor numerice de calcul, prin insăși repetarea lor.

Cursul fiind destinat viitorilor ingineri, în scopul cunoașterii metodelor numerice de bază necesare rezolvării problemelor ingineresti, el nu este încărcat cu demostrații ale propozițiilor sau teoremelor utilizate (acestea fiind lăsate ca lectură bibliografică studenților interesați), ci urmărește "impregnarea" studenților cu metode de aproximare cât mai rapide, care pot fi programate ulterior, în scopul determinării unei soluții pentru problema modelizată dorită.

Prima parte a fiecărui capitol cuprinde prezentarea unor noțiuni teoretice și deducerea unor algoritmi pentru metodele prezentate, iar a doua parte se referă la calcule numerice pe baza algoritmilor respectivi și la testarea lor pe exemple numerice concrete, ce vor fi folosite în verificarea programelor implementate ulterior în cadrul orelor de laborator. Sunt prezentate de asemenea, exerciții rezolvate, care demonstrează fie rezultate teoretice, fie reprezintă aplicații ale algoritmilor de calcul numeric. Unele probleme propuse au şi rezultate, sugestii sau soluţii complete. Altele sunt prezentate în mod intenţionat fără rezultat, lăsând astfel studenţilor "sarcina” de a ataşa ei înşişi un rezultat, obţinut fie prin rezolvare analitică, fie cu ajutorul algoritmilor pe care aceştia i-au programat în timpul orelor de laborator. La sfârșitul fiecărui capitol, secțiunea *„Ce nu vi s-a spus ...”* dorește să incite studenții la eventuale lecturi suplimentare, pe baza bibliografiei furnizate, în tematica prezentată în capitolul respectiv.

Diverse simboluri grafice au fost utilizate, în scopul asigurării unei lecturi cât mai agreabile a acestui manual. Simbolul  indică o *Definiție*,  o *Teoremă*,  o *Propoziție*, iar  o *Observație.*  a fost utilizat pentru a marca prezența unor exemple detaliate de aplicare a metodelor numerice prezentate, simbolul  marchează un Algoritm, iar  secțiunea Problemelor propuse spre rezolvare.  apare ori de câte ori se dorește sublinierea unui punct critic al metodei în cauză sau a unui comportament mai interesant al unui algoritm, iar  pentru a semnala mici trucuri mnemotehnice. Se face destul de des trimitere către referințele bibliografice [PM07] și [PM13], în care numeroase rezultate teoretice abordate în acest manual sunt demonstrate, iar diverși algoritmi numerici necesari viitorilor ingineri sunt prezentați.

Sunt prezentate în acest manual metodele de bază ale calculului numeric. Se regăsesc aici cele mai importante metode numerice prin care obținem soluții aproximative pentru diferite probleme matematice studiate, spre exemplu la cursurile de Algebră liniară şi/sau Ecuaţii diferenţiale. După fiecare metodă este prezentată şi algoritmizarea corespunzătoare într-un limbaj pseudocod. Activitatea studenţilor pe parcursul laboratoarelor va consta în a proba valabilitatea acestor algoritmi, prin programarea lor într-un limbaj, spre exemplu C/C++, şi a-i testa, în vederea stabilirii avantajelor, dezavantajelor, respectiv limitelor acestora. Parcurgerea şi înţelegerea acestui manual necesită cunoştinţe din Analiza Matematică, Algebra liniară şi Ecuaţii diferenţiale, precum şi noţiuni de programare.

În afara prezentului manual de curs, studenţii mai pot consulta şi diversele materiale ce se găsesc pe site-ul web ce l-am creat şi pe care îl menţin actualizat din anul 2012, site găzduit la adresa https://mracila.com/mn; site-ul conţine materiale necesare desfăşurării activităţilor de curs, seminar şi laborator la disciplina *Metode Numerice,* cu numeroase probleme rezolvate şi unele aplicaţii practice.

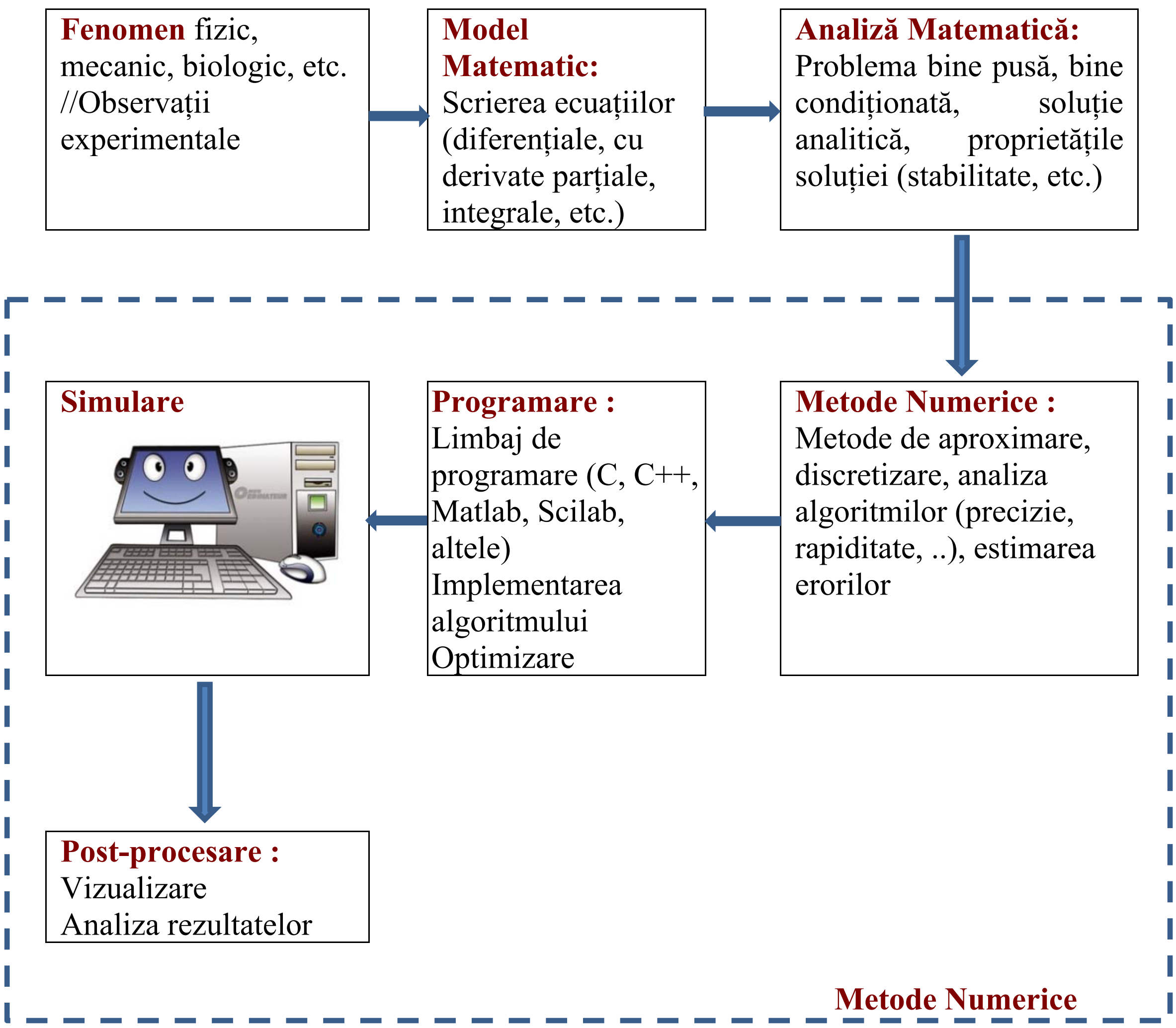
DE CE toată această "organizare" pentru cursul de ***Metode Numerice*** ? Pentru ca, la final, dumneavoastră, studenții, să deveniți acei ingineri capabili să modelizeze și să rezolve cu precizie problemele întâlnite, de orice natură ar fi acestea (fizică, mecanică, electrică, etc).

Nu în ultimul rând, doresc să amintesc deosebita plăcere cu care am lucrat şi lucrez cu studenţii de la specializările Ingineria Sistemelor şi Mecatronică-Robotică ale Facultăţii de Automatică, Calculatoare şi Electronică a Universităţii din Craiova. Această carte le este dedicată.

Mihaela Racilă
Craiova, 2020

Introducere in Metodele Numerice

Putem defini ***Metodele Numerice*** ca fiind disciplina ce permite simularea cu ajutorul unui calculator a unui fenomen sau proces descris printr-un model matematic.



Modelul Matematic: Un model este un concept utilizat pentru a reprezenta ceva, un fenomen, un process, etc. El utilizează concepte matematice : constante, variabile, funcții, ecuații, operatori, etc. Abstractizarea permite construirea unor modele ce au o validitate și o utilitate generală în lumea reală, considerând unele simplificări ale sistemelor studiate.

Interesele modelului matematic sunt numeroase :

- ✓ prevederea evoluției unui sistem în funcție de diferiți stimuli, fără a repeta fiecare experiment, sau în situații ne-verificabile experimental;
- ✓ acționarea asupra unui sistem, propunând strategii optimale (teoria controlului optimal);
- ✓ formularea și validarea cantitativă a ipotezelor;

- ✓ explorarea proprietăților unui model, spre exemplu: studiul elasticității, vâscozității sau plasticității materialelor, reconstituirea unor obiecte 3D prin mijloace non-invazive, etc.;
- ✓ nu în ultimul rând, un model matematic este mai puțin costisitor decât un model fizic.

Dificultățile construirii unui model matematic constau în :

- ✓ erori sau non-exhaustivitatea datelor experimentale ;
- ✓ dificultatea (sau chiar imposibilitatea) rezolvării exacte a modelului matematic creat.

Modelizarea matematică este în mod clar un proces iterativ. Modelul nu apare pur și simplu în urma examinării sistemului (fenomenului); din contră, el rezultă dintr-un șir "delicat" de decizii și de revizii. Delimitarea însăși a sistemului este o alegere ce evoluează în cursul procesului de modelizare/simulare. În orice moment, simularea numerică permite explorarea comportamentelor generate de ecuațiile ce compun modelul. Prin intermediul confruntării acestor comportamente simulate cu cele cunoscute deja ale sistemului studiat, se poate realiza eventuala modificare, afinare sau dezvoltare a sistemului modelizat. Astfel, se ameliorează înțelegerea sistemului studiat. În afara înțelegerii comportamentelor sistemelor, modelele matematice permit testarea și evaluarea diverselor strategii de acțiune. Spre exemplu, în cazul unei epidemii, un model matematic realizat ar putea defini strategiile de vaccinare sau de izolare a bolnavilor.

Trebuie totuși amintit încă o data (și dealtfel mereu), că un model este ***o aproximare a realității***, că pertinența și utilitatea sa sunt funcții de alegerile făcute în timpul elaborării acestuia, că aceste alegeri sunt ghidate de necesitățile a priori, cărora modelul va fi conceput pentru a răspunde.

Analiza Matematică: Trebuie în primul rând să ne asigurăm de existența și unicitatea soluției modelului matematic creat. Dacă nu există unicitate, vor trebui adăugate condiții suplimentare modelului, care să asigure buna alegere a soluției ce corespunde fenomenului studiat. Vor fi studiate apoi proprietățile soluției, în special stabilitatea acesteia : mici perturbări admisibile ale datelor trebuie să inducă doar mici perturbări asupra soluției. Vom căuta soluții analitice pentru cazuri simplificate, pentru a putea testa apoi metodele numerice și algoritmii dezvoltați.

Metodele Numerice: Calculatorul este astăzi o unealtă inconturnabilă în ceea ce privește modelizarea și simularea sistemelor complexe, însă trebuie să știm să ne exprimăm problemele în limbaj matematic, fie că ele sunt de natură fizică sau mecanică, electrică, bilogică, etc... Suntem obișnuiți să rezolvăm problemele în mod analitic, în timp ce calculatorul nu lucrează decât cu șiruri de numere. Vom vedea că există deseori mai multe moduri de abordare pentru rezolvarea unei aceleași probleme, ceea ce conduce la algoritmi diferiți. Unul dintre obiectivele acestui curs este acela de a furniza baze cât mai riguroase pentru dezvoltarea unor algoritmi utili în rezolvarea diverselor probleme inginerești.

Un algoritm, pentru a fi util, trebuie să satisfacă trei condiții. El trebuie să fie:

- ✓ **Rapid:** numărul operațiilor necesare pentru a ajunge la rezultatul dorit trebuie să fie cât mai redus posibil;

- ✓ **Precis**: algoritmul trebuie să țină cont de efectul erorilor inerente oricărui calcul numeric; aceste erori se pot datora fie modelizării, fie datelor (obținute prin măsurători spre exemplu), sau însăși metodei de aproximare;
- ✓ **Suplu:** algoritmul trebuie să fie ușor transpozabil pe probleme diferite.

Alegerea și optimizarea algoritmilor numerici este crucială atât pentru calculul de tip industrial, adesea foarte repetitiv și trebuind deci să fie executat în timp foarte scurt, cât și pentru calculul clasic, ce are ca limită doar răbdarea celui care l-a creat. Experiența arată că între o aproximare numerică standard și una bine reflectată, optimizată, un câștig în timp de calcul de factor 100 și chiar mai mare este adesea observat. Este clar că putem trece, prin acest efort, de la un calcul total nerezonabil, la unul perfect banal: toată "cheia” calculului numeric este aici; este deosebit de importantă buna cunoașterea metodelor numerice, a avantajelor și limitelor acestora.

Erori: Simplul fapt de a utiliza calculatorul pentru reprezentarea numerelor reale induce erori. În consecință, în loc de a încerca să eliminăm erorile, este preferabil să încercăm a le controla efectele.

În general, putem identifica mai multe niveluri de erori în aproximarea și rezolvarea unei probleme inginerești.La cel mai înalt nivel, găsim eroarea ce provine din însăși faptul că am redus realitatea fizică a problemei la un model matematic, este o ***eroare inerentă***. Astfel de erori limitează aplicarea modelului matematic în anumite situații și nu se află în "câmpul de control” al Calculului Numeric. Cel mai adesea, nu putem da o soluție explicită unui model matematic creat, fie că el este exprimat printr-o integrală, o ecuație algebrică sau diferențială, un sistem liniar sau neliniar.

Rezolvarea cu ajutorul algoritmilor numerici induce inevitabil introducerea și propagarea ***erorilor de rotunjire.***

În plus, apar adesea alte erori, legate de faptul că un calculator nu poate realiza decât într-o manieră aproximativă calcule ce implică un număr infinit de operații aritmetice. Spre exemplu, calculul sumei unei serii se realizează utilizând o formulă convenabilă de aproximare; apar astfel ***erorile de trunchiere*** sau ***erorile de metodă***.

Erorile inerente sunt anterioare aplicării metodei numerice, iar erorile de trunchiere și de rotunjire apar în timpul calculului numeric.

I. ALGEBRA NUMERICA

1. Rezolvarea numerica a sistemelor liniare

Obiective: *după parcurgerea acestui capitol veţi fi capabili să:*

- ✓ rezolvaţi un sistem liniar folosind metoda de eliminare a lui **Gauss**
- ✓ rezolvaţi un sistem liniar folosind metoda de factorizare ***LR*** a unei matrice
- ✓ rezolvaţi un sistem liniar folosind metodele iterative Seidel-Gauss şi Jacobi
- ✓ calculaţi numeric un determinant şi inversa unei matrice

1.1 Elemente esenţiale de analiză matriceală – *Ne amintim ...*

Numim *matrice* $m \ x \ n$ sau de ordin $m \ x \ n$ cu coeficienţi în $\boldsymbol{R}$, orice „tabel” cu m linii şi n coloane, cu elemente din $\boldsymbol{R}$. Mulţimea acestor matrice o vom nota cu $\boldsymbol{R}^{mxn}$.

Notăm prin a_{ij} elementul matricei situat pe linia i, coloana j $(i = 1,..,m \ \ j = 1,..,n)$.

O matrice A este reprezentată între două paranteze:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & . \ . & a_{1j} & . \ . & a_{1n} \\ . & & . & & . \\ . & & . & & . \\ a_{i1} & . \ . & a_{ij} & . \ . & a_{in} \\ . & & . & & . \\ . & & . & & . \\ a_{m1} & & a_{mj} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

sau $= \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$.

O matrice $m \ x \ 1$ se numeşte *vector-coloană*, iar o matrice $1 \ x \ n$ se numeşte *vector-linie*.

Dacă $m = n$, spunem că matricea este o *matrice pătratică.*

Spunem că o matrice pătratică este *superior triunghiulară* (triangulară) dacă: $a_{ij} = 0$ pentru $i > j$ şi *inferior triunghiulară* (triangulară) dacă: $a_{ij} = 0$ pentru $i < j$.

Numim *transpusa matricei A*, matricea A^t, care se obţine prin schimbarea liniilor cu coloanele în matricea iniţială : $A^t = \left(a_{ji}\right)_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le i \le m}}$.

O matrice se numeşte *simetrică*, dacă $a_{ij} = a_{ji}$, pentru orice i şi j diferiţi.

Prin *urma* unei matrice pătratice vom înţelege suma elementelor de pe diagonala principală a matricei, adică: $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

Calcul matriceal elementar

Adunarea matricelor

Dacă $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ şi $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ sunt două matrice $m \ x \ n$, definim *suma matricelor A şi B* prin: $A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$.

!!! Suma a două matrice de ordine diferite nu este definită.
Adunarea matricelor este comutativă şi asociativă.

Înmulţirea matricelor

Dacă $A = (a_{ik})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le k\le n}}$ este o matrice *m x n* şi $B = (b_{kj})_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le j\le p}}$ este o matrice *n x p*, definim *produsul matricelor A şi B* prin: $AB = \left(\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kj})\right)_{ij}$, $1 \le i \le m, 1 \le j \le p$ (elementul $(AB)_{ij}$ se obţine ca produs scalar între linia *i* a lui *A* şi coloana *j* a lui *B*).

!!! Înmulţirea matricelor *nu este* în general comutativă.

Dacă dimensiunile matricelor sunt compatibile, înmulţirea este asociativă şi distributivă faţă de adunare.

Calculul unui determinant de ordin n - regula lui Laplace

Fie *A* o matrice pătratică de ordin *n, n > 1.* Notăm prin A_{ij} $(1 \le i, j \le n)$ matricea pătratică de ordin *n - 1* obţinută prin suprimarea liniei *i* şi coloanei *j* din matricea *A*.
Determinantul lui *A* se poate calcula cu formula:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$$

oricare ar fi linia *i*, $1 \le i \le n$, sau, echivalent,

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$$

oricare ar fi coloana *j*, $1 \le j \le n$.

Truc mnemotehnic: Pentru a reţine semnele acestor două formule, putem remarca faptul că distribuţia semnelor + şi - în formula $(-1)^{i+j}$ este asemănătoare cu distribuţia pătrăţelelor negre şi albe pe o tablă de şah :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots\cdots \\ - & + & - & + & \cdots\cdots \\ + & - & + & - & \cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Determinant de ordinul 2

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Determinant de ordinul 3 – regula lui Sarrus / regula triunghiului

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Regula lui Sarrus

$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$	$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}$
$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$	$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$

Regula triunghiului

$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$	$a_{11}a_{22}a_{33} +$
$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$	$+ a_{21}a_{32}a_{13} +$
$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$	$+ a_{12}a_{23}a_{31}$
$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$	$-a_{13}a_{22}a_{31} -$
$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$	$- a_{23}a_{32}a_{11} -$
$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$	$-a_{21}a_{12}a_{33}$

Determinant de ordinul 4

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

1.2 Condiţionarea unui sistem liniar

Fie sistemul liniar nesingular $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ unde $\boldsymbol{x}$ este vectorul necunoscut, $\boldsymbol{b}$ este un vector dat în $\boldsymbol{R}^n$, *iar A* este în $\boldsymbol{R}^{n \times n}$ şi sistemul liniar perturbat $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b}$ unde $\delta\boldsymbol{b}$ este o mică perturbare a lui $\boldsymbol{b}$. Prin liniaritate, soluţia $\boldsymbol{y}$ a sistemului perturbat este legată de soluţia $\boldsymbol{x}$ a sistemului neperturbat prin relaţia $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}$, cu $A\delta\boldsymbol{x} = \delta\boldsymbol{b}$.

Ne interesează majorarea erorii relative $\frac{\|\delta x\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$ în funcţie de eroarea relativă $\frac{\|\delta\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$ produsă pe termenul liber. Se poate demonstra că $\frac{\|\delta\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \le K(A)\frac{\|\delta\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$, unde *K(A)* este *numărul de condiţionare al matricei A.* Remarcăm că dacă numărul de condiţionare este mare, soluţia sistemului va fi sensibilă la variaţii ale termenului liber (perturbarea datelor de intrare ale sistemului...).

!!! Faptul că un sistem liniar este bine condiţionat nu înseamnă neapărat că soluţia sa va fi aproximată cu o bună precizie. Trebuie în plus să utilizăm şi algoritmi stabili din punct de vedere numeric, în acest sens.. Invers, un număr mare de condiţionare al unei matrice nu împiedică neapărat ca sistemul global, în ansamblu, să fie bine condiţionat, pentru alegeri particulare ale membrului drept.

În general, *numărul de condiţionare* al unei matrice *A* nesingulară se defineşte prin:

$$K(A) = \|A\|\|A\|^{-1} \ge 1,$$

unde $\|\cdot\|$ este o normă matriceală, de exemplu: $\|A\|_1 = \max_{j=1,..,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ sau $\|A\|_\infty = \max_{i=1,..,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

Exemplu: *matricea lui Hilbert*

$$H = (h_{ij})_{i,j=1,..,n}$$
$$h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$$

este o matrice ce are un număr mare de condiţionare.