Florin Iulian Onete

Analiza calitativă a unor probleme eliptice neliniare

Editura UNIVERSITARIA
Craiova, 2023

Referenți științifici:
Prof.univ.dr. Vicențiu RĂDULESCU
Prof.univ.dr. Ionel ROVENȚA

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
ONETE, FLORIN IULIAN
Analiza calitativă a unor probleme eliptice neliniare / Florin Iulian Onete. - Craiova : Universitaria, 2023
Conţine bibliografie
ISBN 978-606-14-1925-8

51

Prefață

Activitatea mea de-a lungul pregătirii acestui volum s-a desfăşurat în cadrul Laboratorului de Analiză Neliniară Pură şi Aplicată de la Universitatea din Craiova.

Imi face plăcere să-i mulţumesc dlui prof. univ. dr. Vicenţiu Rădulescu, coordonatorul tezei mele de doctorat şi directorul laboratorului de cercetare, pentru sprijinul său constant în timpul pregătirii mele ştiinţifice.

Ii mulţumesc pentru suport dlui prof. univ. dr. Ionel Rovenţa, recenzor pentru acest volum şi directorul Departamentului de Matematică al Universităţii din Craiova.

Mulţumesc în mod călduros familiei pentru înţelegere şi suport de-a lungul întregii perioade de pregătire a acestui volum.

Craiova, 1 Februarie 2023

CAPITOLUL 1

Introducere

Rolul ecuaţiilor cu derivate parţiale (liniare sau neliniare) în matematică este de o importanţă primordială, fiind strâns legat de studiul fenomenelor din lumea reală. Cercetarea acestor modele matematice a avut un progres important pornind de la lucrările de pionierat ale lui Laplace, Poisson şi Helmholtz până la studiul modern al ecuaţiilor cu derivate parţiale neliniare, care pot implica multe particularităţi, precum prezentţa unor energii cu faze multiple şi cu regim mixt. Multe ecuaţii cu derivate parţiale neliniare descriu fenomene naturale fundamentale şi ne ajută să formulăm, să modelăm şi să înţelegem un spectru larg de probleme care apar în multe domenii ale ştiinţelor aplicate.

Prezenta lucrare este bazată pe rezultate originale legate de analiza calitativă, cantitativă şi de perturbare a soluţiilor (slabe sau netede) pentru mai multe clase de ecuaţii cu derivate parţiale quasiliniare cu condiţii pe frontieră de tip Dirichlet, Neumann sau Robin. Problemele analizate în această lucrare sunt descrise atât de operatorul p-Laplace (pentru $1 < p < \infty$) cât şi de combinaţii de operatori diferenţiali quasiliniari, ceea ce generează ecuaţii cu fază dublă (respectiv, (p, q)-ecuaţii).

Principalele rezultate originale din această lucrare stabilesc condiţii suficiente de existenţă a soluţiilor, proprietăţi de multiplicitate şi de regularitate a soluţiilor, diverse feluri de perturbări, efecte combinate ale mai multor tipuri de neliniarităţi, etc.

1.1 Publicaţii, diseminare şi activităţi adiacente

Acest volum este constituit din prezentul capitol introductiv, patru capitole care conţin contribuţiile originale, precum şi două anexe cu rezultate auxiliare.

Rezultatele principale din această carte sunt incluse în următoarele articole:

[O2019] F.-I. Onete, On a class of quasilinear problems with double-phase reaction and indefinite weight, *An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.* **46** (2019), no. 1, 218-222.
Indexat BDI. WOS: 000473310900018

[OPV2020] F.-I. Onete, N.S. Papageorgiou, C. Vetro, A multiplicity theorem for parametric superlinear (p, q)-equations, *Opuscula Math.* **40** (2020), no. 1, 131-149.
Indexat BDI. WOS: 000518176400008

[LO2020] S. Leonardi, F.-I. Onete, Nonlinear Robin problems with indefinite potential, *Nonlinear Anal.* **195** (2020), Paper 111760.
Cotat ISI. 2020 Impact Factor: 2.064. Category Rank: 36/330 (Mathematics); 71/265 (Applied Mathematics). WOS: 000522150400025

[OPR2021] F.-I. Onete, N.S. Papageorgiou, V.D. Rădulescu, Twin positive solutions for resonant singular (p, q)-equations, *Special Issue in honor of Alan C. Lazer, Electron. J. Diff. Eqns.*, Special Issue 01 (2021), pp. 169-182.
Cotat ISI. 2020 Impact Factor: 1.282. Category Rank: 106/330 (Mathematics); 148/265 (Applied Mathematics). WOS: 000773560500009

Articolul [LO2020] prezentat mai sus a fost premiat în cadrul competiţiei naţionale "Premierea Rezultatelor Cercetării" de către UEFISCDI:
S. Leonardi, F.-I. Onete, Nonlinear Robin problems with indefinite potential, *Nonlinear Anal.* **195** (2020), Paper 111760. PN-III-P1-1.1-PRECISI-2020-46492.

Rezultatele de cercetare din acest volum au fost diseminate la următoarele conferinţe internaţionale.

[Conf1] F.-I. Onete, *Existence properties for problems with double-phase*, Workshop on Quantum Fields and Nonlinear Phenomena, 27 septembrie 2020
`http://cis01.central.ucv.ro/physics/en/workshop_Sinaia_2020/programworkshop.html`
`http://cis01.central.ucv.ro/physics/en/workshop_Sinaia_2020/8FOnete_poster.pdf`
`http://cis01.central.ucv.ro/physics/en/workshop_Sinaia_2020/List_Participants_PhDSchool.pdf`

[Conf2] F.-I. Onete, *Resonant singular problems with double phase*, Webinar Series on Nonlinear Differential Problems, Progetti di Rilevante Interesse Nazionale, University of Messina, Italia 23 aprilie 2021
`https://www.nodipro-prin17.it/program-webinar`
`https://www.nodipro-prin17.it/wp-content/uploads/2020/12/Onete.pdf`

[Conf3] F.-I. Onete, *Existence results for singular elliptic equations with unbalanced growth*, Methods of Nonlinear Analysis in Differential and Integral Equations, Ignacy Lukasiewicz Rzeszów University of Technology, Polonia, 15 mai 2021
`https://mna2021.prz.edu.pl/participants`
`https://mna2021.prz.edu.pl/conference-schedule`
`https://mna2021.prz.edu.pl/abstracts`

O parte din activitatea de cercetare din cadrul acestei lucrări s-a desfăşurat în cadrul proiectului de cercetare "Nonlinearity and Anisotropy", Proiect de Cercetare Exploratorie 2021–2023, cod proiect: Project PCE PN-III-P4-ID-PCE-2020-0068. Pagina web a acestui proiect se află la

`https://sites.google.com/inf.ucv.ro/nana/home?authuser=0`

1.2 Sinteza rezultatelor

Prezentăm în această secţiune o sinteză a principalelor rezultate de cercetare din prezenta lucrare.

Perturbări mari pentru probleme de valori proprii cu potenţial nedefinit

Acest capitol este dedicat unei probleme de perturbare asociate unei ecuaţii elliptice quasiliniare cu condiţie Dirichlet pe frontieră. Vom reaminti mai întâi câteva rezultate clasice în cazurile liniar şi semiliniar.

Considerăm următoarea problemă Dirichlet liniară:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + h & \text{în } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

unde $h \in L^2(\Omega)$ este o funcţie dată şi λ este un parametru real.

Atunci următoarele rezultate sunt adevărate:

(i) dacă $h \equiv 0$ atunci problema (1.1) are o soluţie pozitivă (care este unică până la înmulţirea cu scalari) dacă şi numai dacă $\lambda = \lambda_1$, unde λ_1 este cea valoarea proprie principală a operatorului lui Laplace;

(ii) dacă $h \geq 0$ şi $h \neq 0$, atunci problema (1.1) are o soluţie pozitivă dacă şi numai dacă $\lambda < \lambda_1$. In acest caz, problema (1.1) este coercivă, iar existenţa şi unicitatea soluţiei rezultă aplicând lema lui Lax-Milgram. In plus, conform principiului de maxim, această soluţie este strict pozitivă.

Intr-un cadru semiliniar, considerăm problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{q-1}u & \text{în } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

unde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este un domeniu mărginit cu frontiera netedă, λ este un parametru real, iar $1 < q < 2^* - 1$, unde 2^* este exponentul critic al lui Sobolev, respectiv

$$2^* := \begin{cases} \dfrac{2N}{N-2} & \text{dacă } N \geq 3 \\ +\infty & \text{dacă } N \in \{1, 2\}. \end{cases}$$

Ca o consecinţă a teoremei *mountain pass* a lui Ambrosetti şi Rabinowitz, problema (1.2) are o soluţie pozitivă pentru orice $\lambda < \lambda_1$. In plus, aplicând metoda variaţională duală se poate demonstra că problema (1.2) are soluţie pentru orice $\lambda \geq \lambda_1$ iar operatorul liniar asociat nu mai este coerciv.

In acest capitol studiem efectul unei perturbări cu creştere variabilă $f(u)$ pentru următoarea problemă Dirichlet quasiliniară

$$\begin{cases} -\Delta_p u = V(x)|u|^{p-2}u + \lambda f(u) & \text{în } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega \\ u \neq 0 & \text{în } \Omega. \end{cases} \tag{1.3}$$

Presupunem că funcţia potenţial $V(x)$ şi termenul de perturbare $f(u)$ satisfac următoarele ipoteze:

(V) : $V \in L^1_{loc}(\Omega)$, $V^+ = V_1 + V_2 \neq 0$, $V_1 \in L^{N/p}(\Omega)$ şi $\lim_{x\to y;\, x\in\Omega} |x-y|^p V_2(x) = 0$ pentru orice $y \in \overline{\Omega}$;

$(f1)$: f este continuă şi există $\delta > 0$ astfel încât f este nenegativă şi nu este identic nulă în intervalul $[0, \delta]$;

$(f2)$: există numerele reale p_1 şi p_2 astfel încât $0 < p_1 < p-1 < p_2$ şi

$$\sup_{t>1} \frac{|f(t)|}{1+|t|^{p_1}} < \infty \quad \text{iar} \quad \sup_{0<t<1} \frac{|f(t)|}{|t|^{p_2}} < \infty.$$

Ipoteza $(f2)$ semnifică faptul că f are o creştere $(p-1)$-superliniară în vecinătatea originii şi o creştere $(p-1)$-subliniară la infinit.

O funcţie model satisfăcând condiţiile $(f1)$ şi $(f2)$ este

$$f(t) = \begin{cases} |t|^{p_1-1}t & \text{dacă } |t| \geq 1 \\ |t|^{p_2-1}t & \text{dacă } |t| < 1. \end{cases}$$

Cf. Szulkin şi Willem [86], fie λ_1 valoarea proprie principală a următoarei probleme de valori proprii cu potenţial nedefinit:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda V(x)|u|^{p-2}u & \text{în } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

Rezultatul principal din acest capitol stabileşte următoarea proprietate de multiplicitate în cazul perturbărilor largi (respectiv, pentru valori mari ale parametrului λ) ale problemei Dirichlet (1.3).

Teorema 1.1. *Presupunem că ipotezele (V), $(f1)$ şi $(f2)$ sunt satisfăcute. Fie λ_1 valoarea proprie principală a problemei (1.4) şi presupunem că $\lambda_1 > 1$. Atunci există un număr real Λ astfel încât problema (1.3) are cel puţin două soluţii pentru orice $\lambda > \Lambda$.*

Demonstraţia Teoremei 1.1 se bazează pe teorema celor trei puncte critice a lui Pucci şi Serrin [75, Corollary 1] (în versiunea generalizată demonstrată de Bonanno [18, Theorem 2.3 şi Remark 2.2]) şi un rezultat de compacitate pentru şiruri Palais-Smale, care utilizează teorema lui Egorov. Teorema celor trei puncte critice a lui Pucci şi Serrin este o consecinţă a cazului degenerat al teoremei *mountain pass* şi are numeroase aplicaţii în studiul problemelor de multiplicitate a soluţiilor pentru diverse clase de ecuaţii eliptice neliniare.

Următoarele două capitole sunt dedicate studiului unor clase de ecuaţii elliptice cu fază dublă. Menţionăm că interesul pentru probleme cu fază dublă este motivat de numeroase modele din fizica matematică. De pildă, operatorul Born-Infeld

$$\text{div}\left(\frac{\nabla u}{(1-2|\nabla u|^2)^{1/2}}\right)$$

sau operatorul relativistic de ordinul al patrulea

$$\text{div}\left(\frac{|\nabla u|^2}{(1-|\nabla u|^4)^{3/4}}\,\nabla u\right)$$

sunt aproximaţi de operatori quasiliniari cu fază dublă. De pildă, cf. Bonheure, d'Avenia şi Pomponio [17], următoarea ecuaţie de tip Born-Infeld apare în electromagnetism:

$$-\text{div}\left(\frac{\nabla u}{(1-2|\nabla u|^2)^{1/2}}\right) = h(u) \text{ în } \Omega.$$

Pe de altă parte, folosind formula lui Taylor, avem

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{2\cdot 2^2}x^2 + \frac{5!!}{3!\cdot 2^3}x^3 + \cdots + \frac{(2n-3)!!}{(n-1)!2^{n-1}}x^{n-1} + \cdots$$

pentru $|x| < 1$.

Luând $x = 2|\nabla u|^2$ şi considerând aproximaţia de ordinul întâi, obţinem aproximarea operatorului Born-Infeld cu un operator diferenţial cu fază dublă.

Aproximaţia de ordinul n a ecuaţiei Born-Infeld este descrisă de următorul operator diferenţial cu fază multiplă:

$$-\Delta u - \Delta_4 u - \frac{3}{2}\Delta_6 u - \cdots - \frac{(2n-3)!!}{(n-1)!}\Delta_{2n} u.$$

In acelaşi cadru putem menţiona următorul operator relativistic de ordinul al patrulea

$$u \mapsto \text{div}\left(\frac{|\nabla u|^2}{(1-|\nabla u|^4)^{3/4}}\,\nabla u\right),$$

care descrie multiple fenomene din mecanica cuantică relativistă. Din nou, folosind formula lui Taylor, avem

$$x^2(1-x^4)^{-3/4} = x^2 + \frac{3x^6}{4} + \frac{21x^{10}}{32} + \cdots .$$

Aceasta arată că operatorul relativistic de ordinul al patrulea poate fi aproximat de operatorul neautonom cu fază dublă

$$u \mapsto \Delta_4 u + \frac{3}{4}\Delta_8 u.$$

Suntem interesaţi mai întâi de analiza unei probleme parametrice superliniare cu fază dublă şi condiţie Robin în cazul unor mici perturbări. Stabilim în acest context existenţa soluţiilor cu semn constant cât şi a celor nodale şi extremale. Ulterior vom considera o clasă de ecuaţii rezonante singulare cu fază dublă şi condiţie Dirichlet pe frontieră. In acest cadru stabilim o proprietate de multiplicitate a soluţiilor pozitive.

O descriere detaliată a acestor două capitole este oferită în cele ce urmează.

Probleme Robin parametrice superliniare cu fază dublă şi mici perturbări

In acest capitol studiem următoarea clasă de ecuaţii eliptice quasiliniare cu fază dublă (respectiv, (p,q)-ecuaţii) şi condiţie neliniară pe frontieră de tip Robin:

$$\begin{cases} -\Delta_p u(z) - \Delta_q u(z) + \xi(z)|u(z)|^{p-2}u(z) = \lambda f(z,u(z)) & \text{în } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n_{pq}} + \beta(z)|u|^{p-2}u = 0 \quad \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

unde $1 < q < p < +\infty$ iar λ este un parametru pozitiv.

Principalele ipoteze legate de studiul problemei (P_λ) sunt următoarele:

H(ξ): $\xi \in L^\infty(\Omega)$, $\xi(z) \geq 0$ a.p.t. $z \in \Omega$.

H(β): $\beta \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ cu $0 < \alpha \leq 1$ şi $\beta(z) \geq 0$ pentru orice $z \in \partial\Omega$.

H$_0$: $\xi \not\equiv 0$ sau $\beta \not\equiv 0$.

$H(f)$: $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie Carathéodory astfel încât $f(z,0) = 0$ a.p.t. $z \in \Omega$ şi

(*i*) $|f(z,x)| \leq a(z)[1 + |x|^{r-1}]$ a.p.t. $z \in \Omega$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ cu $a \in L^\infty(\Omega)$, $p < r < p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p} & \text{dacă } p < N \\ +\infty & \text{dacă } N \leq p \end{cases}$;

(*ii*) dacă $F(z,x) = \int_0^x f(z,s)ds$, atunci $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{F(z,x)}{|x|^p} = +\infty$ uniform a.p.t. $z \in \Omega$ şi există $\mu \in \left(\max\{1, (r-p)\frac{N}{p}\}, p^*\right)$ şi $\beta_0 > 0$ astfel încât

$$\beta_0 \leq \liminf_{x\to\pm\infty} \frac{f(z,x)x - pF(z,x)}{|x|^\mu} \quad \text{uniform a.p.t. } z \in \Omega;$$

(*iii*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(z,x)}{|x|^{q-2}x} = +\infty$ uniform a.p.t. $z \in \Omega$ şi există $\tau \in (1,q)$ şi $0 < \widehat{\eta}_0 < \eta_0$ astfel încât

$$0 \leq \liminf_{x\to 0} \frac{\tau F(z,x) - f(z,x)x}{|x|^p} \quad \text{uniform a.p.t. } z \in \Omega,$$
$$\widehat{\eta}_0 \leq \liminf_{x\to 0} \frac{f(z,x)}{|x|^{\tau-2}x} \leq \limsup_{x\to 0} \frac{f(z,x)}{|x|^{\tau-2}x} \leq \eta_0 \text{ uniform a.p.t. } z \in \Omega.$$

Remarcăm că ipoteza $H(f)\,(ii)$ implică următorul comportament asimptotic al termenului sursă:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(z,x)}{|x|^{p-2}x} = +\infty \quad \text{uniform a.p.t. } z \in \Omega.$$

Următoarele funcţii satisfac ipotezele $H(f)$. Pentru simplicitate, presupunem că funcţiile nu depind de z:

$$f_1(x) = \begin{cases} |x|^{\tau-2}x & \text{dacă } |x| \leq 1, \\ |x|^{p-2}x\ln|x| + x & \text{dacă } 1 < |x|, \end{cases} \text{ cu } 1 < \tau < q < p,$$

$$f_2(x) = \begin{cases} |x|^{r-2}x + k_- & \text{dacă } x < -1, \\ \dfrac{|x|^{\vartheta-2}x}{\ln(1+|x|)} & \text{dacă } |x| \leq 1, \\ x^{r-1} + k_+ & \text{dacă } 1 < x, \end{cases} \text{ cu } 1 < \vartheta < q+1,\ p < r < p^* \text{ şi } k_\pm = -1 \pm \frac{1}{\ln 2}.$$

Dintre aceste funcţii, f_2 nu satisface condiţia de creştere Ambrosetti-Rabinowitz.

Principalul rezultat din acest capitol stabileşte următoarea proprietate de multiplicitate a soluţiilor (existenţa a a cel puţin cinci soluţii cu informaţii despre semn) în cazul unor mici perturbări ale termenului sursă al problemei (P_λ).

Teorema 1.2. *Dacă ipotezele $H(\xi)$, $H(\beta)$, H_0, $H(f)$ sunt satisfăcute, atunci există $\lambda^* > 0$ astfel încât pentru orice $\lambda \in (0, \lambda^*)$ problema (P_λ) are cel puţin cinci soluţii netriviale, respectiv*

$$u_0,\ \widehat{u} \in D_+,\ v_0,\ \widehat{v} \in -D_+,\ y_0 \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ nodală.}$$

In plus, problema admite soluţii extremale cu semn constant $u_\lambda^* \in D_+$, $v_\lambda^* \in -D_+$ şi avem $y_0 \in [v_\lambda^*, u_\lambda^*] \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Demonstraţia combină metode variaţionale şi topologice iar principalele etape sunt următoarele:

(i) existenţa soluţiilor cu semn constant pentru $\lambda > 0$ suficient de mic;

(ii) existenţa soluţiilor extremale cu semn constant;

(iii) existenţa soluţiilor nodale;

(iv) existenţa a cinci soluţii pentru mici perturbări ale reacţiei.

Existenţa soluţiilor extremale cu semn constant joacă un rol esenţial pentru a genera soluţii nodale.

Probleme Dirichlet rezonante singulare cu fază dublă

In acest capitol studiem existenţa soluţiilor pozitive pentru următoarea clasă de probleme cu fază dublă cu condiţie Dirichlet şi reacţie singulară:

$$\begin{cases} -\Delta_p u(z) - \Delta_q u(z) = a(z)u(z)^{-\eta} + f(z, u(z)) \text{ în } \Omega, \\ u\Big|_{\partial\Omega} = 0,\ u > 0 \text{ în } \Omega, \end{cases} \tag{1.5}$$

unde $1 < q \leq p$ şi $0 < \eta < 1$.

In termenul de reacţie distingem atât prezenţa unei neliniarităţi singulare $a(z)x^{-\eta}$ cât şi a unei perturbări Carathéodory $f(z, x)$. Reamintim că funcţia $f(z, x)$ este o aplicaţie Carathéodory dacă pentru orice $x \in \mathbb{R}$ funcţia $z \mapsto f(z, x)$ este măsurabilă şi pentru a.p.t. $z \in \Omega$ aplicaţia $x \mapsto f(z, x)$ este continuă. In plus, presupunem că funcţia Carathéodory $f(z, \cdot)$ satisface o condiţie de creştere $(p-1)$ liniară dacă $x \to +\infty$ şi, asimptotic, putem avea rezonanţă în raport cu valoarea proprie principală pentru operatorul p-Laplacian cu condiţie Dirichlet. De fapt, fenomenul de rezonanţă apare din dreapta primei valori proprii, ceea ce face ca energia asociată problemei să fie nedefinită, anume necoercivă. Aşadar, în problema Dirichlet neliniară (1.5), reacţia suportă efectele combinate ale unui termen singular şi ale unei perturbări cu rezonanţă.

Principalele ipoteze legate de studiul problemei (1.5) sunt următoarele:

H_0: $a \in C_0^1(\overline{\Omega})$, $a(z) > 0$ pentru orice $z \in \Omega$.

H_1: $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie Carathéodory astfel încât $f(z, 0) = 0$ a.p.t. $z \in \Omega$ şi

(i) $|f(z, x)| \leq a(z)(1 + x^{p-1})$ a.p.t. $z \in \Omega$, pentru orice $x \geq 0$, unde $a \in L^\infty(\Omega)$;

(ii) $\hat{\lambda}_1(p) \leq \liminf_{x \to +\infty} \dfrac{f(z, x)}{x^{p-1}}$ uniform a.p.t. $z \in \Omega$;

(iii) dacă $F(z,x) = \int_0^x f(z,x)ds$ atunci există $\tau \in (q,p)$ astfel încât

$$0 < \beta_0 \leq \liminf_{x\to+\infty} \frac{pF(z,x) - f(z,x)x}{x^\tau} \text{ uniform a.p.t. } z \in \Omega;$$

(iv) există $\mu \in (1,q)$ şi $\delta, \vartheta > 0$ astfel încât

$$C_0 x^\mu \leq f(z,x)x \leq \mu F(z,x) \text{ a.p.t. } z \in \Omega, \text{ pentru orice } 0 \leq x \leq \delta, \text{ unde } C_0 > 0,$$

$$a(z)\vartheta^{-\eta} + f(z,\vartheta) \leq -\hat{C} < 0 \text{ a.p.t. } z \in \Omega;$$

(v) pentru orice $\rho > 0$, există $\hat{\xi}_\rho > 0$ astfel încât pentru a.p.t. $z \in \Omega$, funcţia

$$x \mapsto f(z,x) + \hat{\xi}_\rho x^{p-1}$$

este monoton crescătoare pe intervalul $[0,\rho]$.

Prin soluţie a problemei (1.5) înţelegem o funcţie $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ astfel încât $u^{-\eta}h \in L^1(\Omega)$ pentru orice $h \in W_0^{1,p}(\Omega)$ şi

$$\langle A_p(u), h\rangle + \langle A_q(u), h\rangle = \int_\Omega \left[a(z)u^{-\eta} + f(z,u)\right] hdz \text{ pentru orice } h \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Problema (1.5) are o structură variaţională şi un rol important în analiza dezvoltată în acest capitol îl are studiul energiei asociate acestei probleme, respectiv funcţionala $\varphi : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definită prin

$$\varphi(u) = \frac{1}{p}\|Du\|_p^p + \frac{1}{q}\|Du\|_q^q - \frac{1}{1-\eta}\int_\Omega a(z)(u^+)^{1-\eta}dz - \int_\Omega F(z,u^+)dz$$

pentru orice $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Principalul rezultat din acest capitol stabileşte următoarea proprietate de multiplicitate pentru problema Dirichlet singulară cu fază dublă (1.5).

Teorema 1.3. *Dacă ipotezele H_0 şi H_1 sunt satisfăcute, atunci problema* (1.5) *are cel puţin două soluţii pozitive*

$$u_0, \hat{u} \in \operatorname{int} C_+, u_0 \neq \hat{u}, u_0(z) < \vartheta \text{ pentru orice } z \in \overline{\Omega}.$$

Prezenţa termenului singular în problema (1.5) implică faptul că $\varphi(\cdot)$ nu este de clasă C^1, deci nu putem utiliza rezultatele teoriei clasice a punctului critic în mod direct pentru această funcţională. Din acest motiv, pentru a "ocoli" singularitatea şi a lucra cu funcţii netede de clasă C^1, un rol important în analiza noastră este studiul unei probleme auxiliare obţinute prin trunchierea neliniarităţii, respectiv următoarea (p,q)-ecuaţie auxiliară cu condiţie Dirichlet pe frontieră

$$\begin{cases} -\Delta_p u(z) - \Delta_q u(z) = k(z,u(z)) \text{ în } \Omega, \\ u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \ u > 0 \text{ în } \Omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

unde $1 < q < p$.

In problema (1.6), funcţia de trunchiere $k(z,x)$ este următoarea aplicaţie Carathéodory:

$$k(z,x) = \begin{cases} C_0(x^+)^{\mu-1} - C_2(x^+)^{r-1}, & \text{dacă } x \le \vartheta \\ C_0\vartheta^{\mu-1} - C_2\vartheta^{r-1}, & \text{dacă } \vartheta < x. \end{cases} \tag{1.7}$$

In relaţia (1.7), constanta C_0 este cea care apare în ipoteza H_1(iv), în timp ce constanta pozitivă C_2 este bine definită observând că ipotezele noastre implică

$$f(z,x) \ge C_0 x^{\mu-1} - C_2 x^{r-1} \text{ a.p.t. } z \in \Omega, \text{ pentru orice } x \ge 0, \text{ unde } C_2 > 0.$$

Probleme neliniare Robin cu potenţial nedefinit

In acest capitol studiem o clasă de probleme neliniare de tip Robin descrise de un operator diferenţial care este suma dintre operatorul p-Laplacian şi un potenţial nedefinit. Condiţiile privind termenul sursă sunt minimale.

Demonstrăm două teoreme de multiplicitate şi oferim informaţii despre semnul soluţiilor. In cazul semiliniar ($p = 2$), arătăm că putem avea mai multe soluţii nodale. Principalele rezultate sunt aplicate unei clase speciale de ecuaţii logistice cu reacţie echidifuzivă.

Suntem interesaţi de existenţa şi multiplicitatea soluţiilor netede netriviale pentru următoarea clasă de ecuaţii quasiliniare parametrice cu condiţie Robin neliniară:

$$\begin{cases} -\Delta_p u(z) + \xi(z)|u(z)|^{p-2}u(z) = f(z,u(z)) & \text{în } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n_p} + \beta(z)|u|^{p-2}u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.8}$$

unde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă C^2.

Funcţia potenţial $\xi(z) \in L^\infty(\Omega)$ este, în general, o funcţie nodală. Deci, operatorul diferenţial care descrie problema nu este coerciv, ceea ce nu permite aplicarea metodei directe a calculului variaţional.

Reacţia $f(z,x)$ este o funcţie Carathéodory, respectiv, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ aplicaţia $z \mapsto f(z,x)$ este măsurabilă şi a.p.t. $z \in \Omega$ funcţia $x \mapsto f(z,x)$ este continuă. Condiţiile cu privire la $f(z,\cdot)$ sunt minimale şi implică faptul că funcţionala energetică (Euler) asociată problemei este coercivă.

Impunem următoarele condiţii de regularitate privind funcţia potenţial $\xi(\cdot)$ şi potenţialul de frontieră $\beta(\cdot)$.

H($\boldsymbol{\xi}$): $\xi \in L^\infty(\Omega)$.

Această ipoteză arată că funcţia potenţial poate să-şi schimbe semnul.

H($\boldsymbol{\beta}$): $\beta \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ pentru un anumit $\alpha \in]0,1[$ şi $\beta(z) \ge 0$, $\forall\, z \in \partial\Omega$.

Cazul $\beta \equiv 0$ este, de asemenea, inclus în analiza noastră şi corespunde unei probleme Neumann.

$\boldsymbol{H_1}$: Presupunem că $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie Carathéodory astfel încât $f(z,0) = 0$ a.p.t. $z \in \Omega$ şi

(i) există $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ astfel încât

$$|f(z,x)| \le \alpha(z)[1 + |x|^{r-1}] \text{ a.p.t. } z \in \Omega, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R},\ p < r < p^*;$$

(ii) avem
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(z,x)}{|x|^{p-2}x}=-\infty \quad \text{uniform a.p.t. } z\in\Omega,$$

(iii) există $q\in]0,1[$, $\delta>0$ şi $\hat{c}>0$ astfel încât
$$\hat{c}|x|^q\le f(z,x)x\le qF(z,x) \quad \text{a.p.t. } z\in\Omega, \text{ pentru orice } |x|\le\delta.$$

Remarcăm faptul că ipoteza $H_1(iii)$ implică prezenţa unei neliniarităţi concave în jurul originii.

Vom putea obţine o soluţie nodală şi dacă presupunem că $f(z,\cdot)$ are o creştere $(p-1)$ liniară în vecinătatea originii. Noile ipoteze cu privire la termenul sursă sunt următoarele.

***H*$_2$**: Presupunem că $f:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcţie Carathéodory astfel încât $f(z,0)=0$ a.p.t. $z\in\Omega$ şi următoarele condiţii sunt satisfăcute:

(i) există $\alpha\in L^\infty(\Omega)$ astfel încât
$$|f(z,x)|\le\alpha(z)[1+|x|^{r-1}] \quad \text{a.p.t. } z\in\Omega, \text{ pentru orice } x\in\mathbb{R},\ p<r<p^*;$$

(ii) avem
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(z,x)}{|x|^{p-2}x}=-\infty \quad \text{uniform a.p.t. } z\in\Omega,$$

(iii) avem
$$\hat{\lambda}_2<\eta_0\le\liminf_{x\to0}\frac{f(z,x)}{|x|^{p-2}x}\le\limsup_{x\to0}\frac{f(z,x)}{|x|^{p-2}x}\le\hat{\eta}_0 \quad \text{uniform a.p.t. } z\in\Omega.$$

Ipoteza $H_2(iii)$ impune nu doar faptul că, atunci când $x\to0$, câtul $\dfrac{f(z,x)}{|x|^{p-2}x}$ ramâne strict deasupra lui $\hat{\lambda}_2>\hat{\lambda}_1$ dar, în plus, funcţia $f(z,\cdot)$ are o creştere $(p-1)$–liniară într-o vecinătate a originii.

Principalul rezultat de multiplicitate pentru problema (1.8) este următorul.

Teorema 1.4. *Dacă ipotezele $H(\xi),H(\beta),H_2$ sau H_3 sunt satisfăcute, atunci problema (1.8) are cel puţin trei soluţii netriviale, respectiv*
$$u_0\in\operatorname{int}C_+,\ \ v_0\in-\operatorname{int}C_+,\ \ \text{şi } y_0\in[v_0,u_0]\cap C^1(\bar{\Omega}) \text{ nodală.}$$

In acest capitol suntem interesaţi şi de cazul semiliniar, corespunzător lui $p=2$. Aşadar vom considera următoarea problemă Robin:
$$\begin{cases}-\Delta u(z)+\xi(z)u(z)=f(z,u(z)) & \text{în } \Omega\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}+\beta(z)u=0 & \text{pe } \partial\Omega.\end{cases} \tag{1.9}$$

Impunem următoarele ipoteze.

H(ξ)': $\xi \in L^s(\Omega)$ cu $s > N$ şi $\xi^+ \in L^\infty(\Omega)$.

Observăm că potenţialul $\xi(\cdot)$ nu este doar indefinit, dar poate fi şi nemărginit inferior.

H(β)': $\beta \in W^{1,\infty}(\partial\Omega)$ şi $\beta(z) \geq 0$, pentru orice $z \in \partial\Omega$.

Cazul $\beta \equiv 0$ este de asemenea inclus în analiza noastră şi corespunde problemei cu condiţie Neumann pe frontieră.

***H*₃**: Presupunem că $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie măsurabilă astfel încât $f(z, 0) = 0$ a.p.t. $z \in \Omega$, $f(z, \cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ şi

(i) există $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ astfel încât

$$|f'_x(z, x)| \leq \alpha(z)[1 + |x|^{r-1}] \quad \text{a.p.t. } z \in \Omega, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R},\ 2 < r < 2^*;$$

(ii) avem

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(z, x)}{x} = -\infty \quad \text{uniform a.p.t. } z \in \Omega,$$

(iii) există $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $\eta \in L^\infty(\Omega)$ şi $\delta > 0$ astfel încât

$$\eta(z)x^2 \leq f(z, x)x \leq \hat{\lambda}_{m+1}x^2 \quad \text{a.p.t. } z \in \Omega, \text{ pentru orice } |x| \leq \delta, \tag{1.10}$$

dacă $m \geq 3$, atunci $\hat{\lambda}_m \leq \eta(z)$ a.p.t. $z \in \Omega$, $\hat{\lambda}_m \neq \eta$,

dacă $m = 2$, atunci $\hat{\lambda}_2 < \operatorname{essinf}_\Omega \eta$;

în plus, pentru orice $x \neq 0$, a doua inegalitate este strictă pe o submulţime de măsură Lebesgue pozitivă.

Sub aceste ipoteze demonstrăm existenţa a cel puţin două soluţii nodale.

Teorema 1.5. *Dacă ipotezele $H(\xi)', H(\beta)', H_3$ sunt satisfăcute, atunci problema (1.9) are cel puţin patru soluţii netede, respectiv*

$$u_0 \in \operatorname{int} C_+, \quad v_0 \in -\operatorname{int} C_+, \quad y_0, y \in \operatorname{int}_{C^1(\bar{\Omega})}[v_0, u_0] \ \textit{nodale}.$$

In finalul acestui capitol considerăm următoarea ecuaţie logistică semiliniară echidifuzivă cu condiţie Robin:

$$\begin{cases} -\Delta u(z) + \xi(z)u(z) = \lambda\, u(z) - g(z, u(z)) & \text{în } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta(z)u = 0 & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.11}$$

Condiţiile privind termenul de perturbare $g(z, x)$ sunt următoarele:

$\tilde{H}$: Presupunem că $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie măsurabilă astfel încât $g(z, 0) = 0$ a.p.t. $z \in \Omega$, $g(z, \cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ şi

(i) există $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ astfel încât

$$|g'_x(z, x)| \leq \alpha(z)[1 + |x|^{r-1}] \quad \text{a.p.t. } z \in \Omega, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R},\ 2 < r < 2^*;$$

(*ii*) avem

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(z,x)}{x} = +\infty \quad \text{uniform a.p.t. } z \in \Omega,$$

(*iii*) avem

$$g'_x(z,x) = \lim_{x\to 0} \frac{g(z,x)}{x} = 0 \quad \text{uniform a.p.t. } z \in \Omega.$$

Obţinem următoarea proprietate de multiplicitate pentru problema (1.11) în cazul unei perturbări mari a termenului liniar.

Teorema 1.6. *Dacă ipotezele $H(\xi)', H(\beta)', \tilde{H}$ sunt satisfăcute şi $\lambda > \hat{\lambda}_2$ atunci problema (1.11) are cel puţin patru soluţii netede netriviale, respectiv*

$$u_0 \in \operatorname{int} C_+, \;\; v_0 \in -\operatorname{int} C_+, \;\; y_0, \hat{y} \in \operatorname{int}_{C^1(\bar{\Omega})}[v_0, u_0] \;\; \textit{nodale.}$$

1.3 Perspective

Prezentul volum este axat pe analiza unor proprietăţi calitative ale soluţiilor unor clase de ecuaţii cu derivate parţiale quasiliniare cu diverse condiţii pe frontieră: Dirichlet, Neumann sau Robin. In mod particular, suntem interesaţi de probleme cu fază dublă, care sunt descrise de (p,q)-ecuaţii eliptice neliniare.

Câteva direcţii de studiu pe care le vom avea în vedere în conexiune cu problemele studiate în această lucrare sunt următoarele.

(i) Extinderea analizei în cazul în care operatorul p-Laplace este înlocuit cu următorul operator diferenţial introdus de Stuart [84] în conexiune cu fenomene din fizica matematică:

$$\operatorname{div}\left[\gamma\left(\frac{u^2+|\nabla u|^2}{2}\right)\nabla u\right],$$

unde $\gamma : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi pozitivă care satisface anumite ipoteze foarte generale.

Acest operator diferenţial neomogen are o structură vastă şi creează numeroase dificultăţi tehnice, cf. Jeanjean şi Rădulescu [38].

(ii) Dezvoltarea unei analize calitative a soluţiilor în cazul mai general al spaţiilor de funcţii Musielak-Orlicz-Sobolev, care extind într-un cadru anizotrop spaţiile uzuale ale lui Lebesgue şi Sobolev.

(iii) Extinderea analizei la diverse clase de probleme cu convecţie, respectiv ecuaţii conţinând un termen de tipul $|\nabla u|^a$, unde $0 < a \leq 2$. Cf. Serrin [81], cerinţa ca neliniaritatea $|\nabla u|^a$ să crească cel mult cuadratic (respectiv, $0 < a \leq 2$) este naturală în vederea aplicării principiului de maxim.

(iv) In ultimul capitol al acestei cărţi, existenţa a cel puţin două soluţii nodale a fost demonstrată în cazul semiliniar. In acest moment nu cunoaştem dacă un rezultat similar de multiplicitate rămâne valabil în cadrul mai general al problemelor quasiliniare. Ne propunem să abordăm această problemă în perioada următoare.

CAPITOLUL 2

Perturbări mari pentru probleme de valori proprii cu potențial nedefinit

In acest capitol vom studia o problemă quasiliniară de valori proprii supusă unei perturbări cu un termen cu creştere variabilă în vecinătatea originii şi la infinit. Principalul rezultat din acest capitol stabileşte existenţa a cel puţin doua soluţii slabe netriviale în cazul unor perturbări *largi*, respectiv pentru valori mari ale unui anumit parametru. Demonstraţia acestui rezultat combină tehnici variaţionale cu teorema celor trei puncte critice a lui Bonanno [18, Theorem 2.3 şi Remark 2.2] şi Pucci şi Serrin [75, Corollary 1].

Conţinutul acestui capitol este bazat pe lucrarea

F.-I. Onete, On a class of quasilinear problems with double-phase reaction and indefinite weight, *An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.* **46** (2019), no. 1, 218-222.

2.1 Probleme de valori proprii cu pondere

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă, mărginită, cu frontiera netedă şi $1 < p < N$ un număr real. Notăm cu $\mathcal{D}(\Omega)$ mulţimea funcţiilor test în Ω şi cu $\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ închiderea lui $\mathcal{D}(\Omega)$ în norma $\|u\| = |\nabla u|_p$.

Conţinutul acestui capitol este în strânsă conexiune cu fenomenul de *perturbare* pentru diverse clase de ecuaţii cu derivate parţiale. Deşi problema pe care o vom studia este quasiliniară, vom porni de la următorul exemplu elementar în cazul liniar. Acest exemplu se regăseşte în capitolul 9 din Brezis [19].

Considerăm problema Dirichlet liniară

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \lambda u + h & \text{în } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

unde $h \in L^2(\Omega)$ este o funcţie dată şi λ este un parametru real.

Atunci următoarele rezultate sunt adevărate:

(i) dacă $h \equiv 0$ atunci problema (2.1) are o soluţie pozitivă (care este unică până la înmulţirea

cu scalari) dacă şi numai dacă $\lambda = 1 + \lambda_1$, unde λ_1 este cea mai mică valoare proprie a operatorului lui Laplace;
(ii) dacă $h \geq 0$ şi $g \neq 0$, atunci problema (2.1) are o soluţie pozitivă dacă şi numai dacă $\lambda < 1 + \lambda_1$. In acest caz, problema (2.1) este coercivă, iar existenţa şi unicitatea soluţiei rezultă aplicând lema lui Lax-Milgram. In plus, conform principiului de maxim, această soluţie este strict pozitivă.

Alte exemple pentru diverse clase de probleme Dirichlet semiliniare se găsesc în cazul diverselor tipuri de perturbări în articolul recent al lui Jeanjean şi Rădulescu [38].

Intr-o lucrare remarcabilă, Szulkin şi Willem [86] au studiat diverse clase de probleme liniare şi neliniare de valori proprii cu potenţial nedefinit. In cazul quasiliniar, Szulkin şi Willem au considerat următoarea problemă de valori proprii:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda V(x)|u|^{p-2}u & \text{în } \Omega \\ u \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} & \text{în } \Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

unde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este o mulţime deschisă, mărginită, cu frontiera netedă iar $1 < p < N$ este un număr real.

Notăm cu Δ_p operatorul p-Laplace, anume

$$\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$$

Probleme de valori proprii de tipul (2.2) au o lungă istorie. De pildă, dacă Ω este un domeniu mărginit cu frontiera netedă şi $V \equiv 1$ (cazul izotrop), atunci problema (2.2) este asociată teoriei Riesz-Fredholm a operatorilor autoadjuncţi compacţi (cf. Theorem VI.11 în Brezis [20]). Cazul anizotrop este atunci când potenţialul V nu este constant şi a fost studiat pentru prima dată de Bocher [16], Hess şi Kato [36], Minakshisundaran şi Pleijel [47]. De pildă, Minakshisundaran şi Pleijel [47] au studiat problema (2.2) dacă $V \in L^\infty(\Omega)$, $V \geq 0$ în Ω şi $V > 0$ în $\omega \subset \Omega$ with $|\omega| > 0$.

O contribuţie esenţială a articolului lui Szulkin şi Willem este că autorii presupun că funcţia pondere V poate să-şi schimbe semnul în Ω (este un potenţial nedefinit). Principala ipoteză introdusă de Szulkin şi Willem [86] cu privire la potenţialul V este următoarea:

(V) : $V \in L^1_{loc}(\Omega)$, $V^+ = V_1 + V_2 \neq 0$, $V_1 \in L^{N/p}(\Omega)$ şi $\lim_{x\to y;\, x\in\Omega} |x-y|^p V_2(x) = 0$ pentru orice $y \in \overline{\Omega}$.

In această ipoteză presupunem că

$$V = V^+ - V^-, \text{ unde } V^\pm(x) = \max\{\pm V(x), 0\}.$$

Folosind condiţia (V), Szulkin and Willem [86] au demonstrat existenţa unui şir monoton crescător de valori proprii $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ cu funcţiile proprii asociate $\{e_n\}_{n\geq 1}$ astfel încât

$$\lambda_n = \int_\Omega |\nabla e_n|^p dx \to +\infty \quad \text{dacă } n \to \infty.$$

Mai mult, funcţia proprie e_1 asociată primei valori proprii nu-şi schimbă semnul în Ω (deci putem presupune că este nenegativă) şi e_1 este o soluţie a următoarei probleme de minimizare cu constrângere:

$$\lambda_1 = \min\left\{\int_\Omega |\nabla u|^p dx;\ u \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega),\ \int_\Omega V(x)|u|^p dx = 1\right\}.$$

Valorile proprii joacă un rol fundamental în fizica matematică şi sunt adesea asociate fenomenului de rezonanţă în fizică şi geometrie. Cf. Zworski [91, p. 319], "eigenvalues of self-adjoint operators describe, among other things, the energies of bound states, states that exist forever if unperturbed".

2.2 Un rezultat de multiplicitate pentru problema perturbată de valori proprii cu pondere

Scopul principal în acest capitol este să studiem problema (2.2) sub efectul unei perturbări cu creştere variabilă în vecinătatea originii şi la infinit. Mai precis, vom considera următoarea ecuaţie eliptică quasiliniară cu condiţie Dirichlet pe frontieră:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = V(x)|u|^{p-2}u + \lambda f(u) & \text{în } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega \\ u \neq 0 & \text{în } \Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

Fie p^* exponentul critic în sens Sobolev asociat lui p, respectiv

$$p^* := \begin{cases} \dfrac{Np}{N-p} & \text{dacă } 1 < p < N \\ +\infty & \text{dacă } p \geq N. \end{cases}$$

Presupunem că λ este un parametru real pozitiv iar reacţia f satisface următoarele ipoteze:

$(f1)$: f este continuă şi există $\delta > 0$ astfel încât f este nenegativă şi nu este identic nulă în intervalul $[0, \delta]$;

$(f2)$: există numerele reale p_1 şi p_2 astfel încât $0 < p_1 < p - 1 < p_2$ şi

$$\sup_{t>1} \frac{|f(t)|}{1+|t|^{p_1}} < \infty \quad \text{iar} \quad \sup_{0<t<1} \frac{|f(t)|}{|t|^{p_2}} < \infty.$$

Cu alte cuvinte, ipoteza $(f2)$ implică faptul că f are o creştere $(p-1)$-superliniară în vecinătatea originii şi o creştere $(p-1)$-subliniară la infinit. O funcţie model satisfăcând condiţiile $(f1)$ şi $(f2)$ este

$$f(t) = \begin{cases} |t|^{p_1-1}t & \text{dacă } |t| \geq 1 \\ |t|^{p_2-1}t & \text{dacă } |t| < 1. \end{cases}$$

Suntem interesaţi în cele ce urmează în existenţa soluţiilor slabe netriviale ale problemei (2.3), respectiv funcţii $u \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ astfel încât pentru orice $v \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ avem relaţia

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx = \int_\Omega V(x)|u|^{p-2}uv dx + \lambda \int_\Omega f(u)v dx. \tag{2.4}$$

In acest caz, spunem că numărul real $\lambda \in \mathbb{R}$ este o valoare proprie a problemei (2.3) iar funcţia corespunzătoare $u \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ este o funcţie proprie asociată acestei valori proprii. Aceste noţiuni sunt în concordanţă cu teoria dezvoltată de Fučik, Nečas, Souček şi Souček [31, p. 117] în contextul problemelor neliniare de valori proprii. Intr-adevăr, dacă notăm

$$S(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{1}{p}\int_\Omega V(x)|u|^p dx$$

şi

$$T(u) := \int_\Omega F(u)dx, \text{ unde } F(t) = \int_0^t f(s)ds,$$

atunci λ este o valoare proprie pentru perechea (S,T) de operatori neliniari (în sensul introdus în [31]) dacă şi numai dacă există o funcţie proprie corespunzătoare $u \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, care este o soluţie a problemei (2.3) în sensul descris anterior.

Rezultatul principal din acest capitol stabileşte existenţa unui spectru continuu pentru problema quasiliniară perturbată de valori proprii (2.3). Versiunea semiliniară a acestui rezultat a fost stabilită de Rădulescu [77].

Vom demonstra următorul rezultat de multiplicitate în cazul perturbărilor largi ale problemei (2.3).

Teorema 2.1. *Presupunem că ipotezele (V), $(f1)$ şi $(f2)$ sunt satisfăcute. Fie λ_1 valoarea proprie principală a problemei (2.2) şi presupunem că $\lambda_1 > 1$. Atunci există un număr real Λ astfel încât problema (2.3) are cel puţin două soluţii pentru orice $\lambda > \Lambda$.*

2.3 Existenţa a două soluţii în cazul unei perturbări mari

Această secţiune este dedicată demonstraţiei teoremei 2.1.

Problema (2.3) are o structură variaţională iar energia asociată acestei probleme este funcţionala $E : \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definită prin

$$E(u) := A(u) + \lambda B(u),$$

unde

$$A(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{1}{p}\int_\Omega V(x)|u|^p dx \quad \text{pentru orice } u \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$$

şi

$$B(u) := -\int_\Omega F(u)dx \quad \text{pentru orice } u \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstrăm mai întâi că funcţionala E este bine definită. Intr-adevăr, folosind ipoteza $(f2)$, există o constantă pozitivă C astfel încât pentru orice $t \in \mathbb{R}$ avem

$$|F(t)| \le C\,(1 + |t|^{p_1+1}). \tag{2.5}$$

Deci, folosind teorema de scufundare în spaţiile Sobolev (cf. Brezis [19, Corollary IX.14]), rezultă că funcţionala $E : \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ este bine definită.

In continuare, demonstrăm că operatorul neliniar $\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega) \ni u \mapsto F(u)$ nu este constant. In acest scop, notăm cu $e_1 \ge 0$ o funcţie proprie asociată valorii proprii principale λ_1 şi fie δ numărul pozitiv introdus în ipoteza $(f1)$. Considerăm mulţimea deschisă

$$\Omega_\delta = [e_1 > \delta] := \{x \in \Omega;\ e_1(x) > \delta\}.$$

Inlocuind eventual e_1 cu ρe_1 pentru $\rho > 0$ suficient de mare, rezultă că $\Omega_\delta \neq \emptyset$.

Definim funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin

$$g(t) = \min\{t, \delta\}$$

şi considerăm funcţia $w : \Omega \to \mathbb{R}$ definită prin

$$w = g \circ e_1.$$

Folosind [19, Proposition IX.5], deducem că $w \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$.

De asemenea, observăm că

$$w(x) = \delta \quad \text{pentru orice } x \in \Omega_\delta$$

şi

$$0 \leq w(x) \leq \delta \quad \text{pentru orice } x \in \Omega.$$

Folosind ipoteza $(f1)$, deducem că

$$F(w(x)) \geq 0 \quad \text{pentru orice } x \in \Omega$$

şi

$$F(w(x)) > 0 \quad \text{pentru orice } x \in \Omega_\delta,$$

care arată că operatorul neliniar $u \mapsto F(u)$ nu este constant în $\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstrăm în continuare că funcţionala E este coercivă. Reamintim că $E = A + \lambda B$. Deoarece $\lambda_1 > 1$, există $\eta > 0$ astfel încât pentru orice $u \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ avem

$$A(u) \geq \eta \int_\Omega |\nabla u|^p dx.$$

Folosind inegalitatea lui Poincaré, putem presupune că spaţiul de funcţii $\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ este înzestrat cu norma

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Rezultă că pentru orice $u \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ avem

$$A(u) \geq \eta \|u\|^p.$$

Combinând relaţia (2.5) cu ipoteza $(f2)$ deducem că pentru orice $u \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ astfel încât $\|u\|$ este suficient de mare, avem

$$B(u) \geq -C\,(\|u\| + \|u\|^{p_1+1}).$$

Deci, pentru orice $u \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ astfel încât $\|u\|$ este suficient de mare, avem

$$E(u) \geq \eta \|u\|^p - C\,(\|u\| + \|u\|^{p_1+1}).$$

Deci, folosind $(f2)$, deducem că E este o funcţională coercivă, adică

$$E(u) \to +\infty \quad \text{dacă } \|u\| \to \infty. \tag{2.6}$$

2.3.1 O proprietate de compacitate

Reamintim că un şir $(u_n) \subset \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ este un şir Palais-Smale al funcţionalei E dacă

$$\sup_{n\geq 1}|E(u_n)| < +\infty \text{ şi } \|E'(u_n)\| \to 0 \text{ dacă } n \to \infty.$$

Reamintim, de asemenea, că $E : \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ satisface proprietatea Palais-Smale dacă orice şir Palais-Smale conţine un subşir convergent.

Lema 2.2. *Funcţionala E satisface condiţia de compacitate Palais-Smale.*

Demonstraţie. In demonstraţie vom folosi unele idei dezvoltate în Brezis şi Nirenberg [21].

Fie $(u_n) \subset \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ un şir Palais-Smale al funcţionalei E. Folosind relaţia (2.6), rezultă că şirul (u_n) este mărginit. Pe de altă parte, deoarece (u_n) este un şir Palais-Smale, rezultă că

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla v dx = \int_\Omega V(x)|u_n|^{p-2}u_n v dx + \lambda \int_\Omega f(u_n) v dx + o(1)\|v\|,$$

pentru orice $v \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$.

Fie $g(x,u) = V(x)|u|^{p-2}u + \lambda f(u)$. Rezultă că

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla v dx = \int_\Omega g(x,u_n) v dx + o(1)\|v\|,$$

pentru orice $v \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$.

Folosind faptul că $(-\Delta_p)^{-1} : \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)^* \to \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ este un operator mărginit, rezultă că este suficient să arătăm că, trecând eventual la un subşir, $(g(x,u_n))$ este convergent în $\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)^*$. Vom demonstra acest lucru arătând că, la un subşir, $g(x,u_n)$ este convergent în $L^{Np/(N-p)}(\Omega)^* = L^{Np/(Np-N+p)}(\Omega)$. Deoarece $(u_n) \subset \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ este mărginit, putem presupune că, la un subşir,

$$u_n \to u \in L^{Np/(N-p)}(\Omega) \text{ a.p.t. în } \Omega.$$

Reamintim următorul rezultat fundamental din teoria măsurii datorat lui Egorov. Detalii se găsesc în Brezis [19, Thm. IV.28].

Teorema lui Egorov. *Presupunem că $|\Omega|$ este un domeniu cu măsura finită. Fie $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ funcţii măsurabile astfel încât*

$$f_n(x) \to f(x) \text{ a.p.t. } \Omega \text{ (cu } |f(x)| < \infty \text{ a.p.t.).}$$

Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\omega \subset \Omega$ măsurabilă astfel încât $|\Omega\setminus\omega| < \varepsilon$ şi $f_n \to f$ uniform pe ω.

Fixăm $\eta > 0$. Folosind teorema lui Egorov [28], există $\omega \subset \Omega$ astfel încât $|\omega| < \eta$ şi

$$u_n \to u \text{ uniform în } \Omega \setminus \omega.$$

Am notat cu $|\omega|$ măsura Lebesgue a mulţimii ω.

Este suficient să demonstrăm că integrala

$$\int_\omega |g(x,u_n) - g(x,u)|^{Np/(Np-N+p)} dx$$

poate fi făcută oricât de mică.

Pe de o parte, avem

$$\int_\omega |g(x,u)|^{Np/(Np-N+p)}dx \leq C\int_\omega (1+|u|^{Np/(N-p)})dx. \tag{2.7}$$

Deci, alegând $\eta > 0$ suficient de mic, membrul drept al inegalităţii (2.7) poate fi făcut oricât de mic.

Fixăm $\varepsilon > 0$. Tinând cont de definiţia funcţiei $g(x,u)$ şi de ipoteza (f2), există $C_\varepsilon > 0$ astfel încât

$$\int_\omega |g(x,u_n)|^{Np/(Np-N+p)}dx \leq \varepsilon\int_\omega |u_n|^{Np/(N-p)}dx + C_\varepsilon\,|\omega|. \tag{2.8}$$

Combinând teorema de scufundare a lui Sobolev cu faptul că $(u_n) \subset \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ este un şir mărginit, deducem că există $C > 0$ astfel încât

$$\varepsilon\int_\omega |u_n|^{Np/(N-p)}dx + C_\varepsilon\,|\omega| \leq C\,\varepsilon + C_\varepsilon\,|\omega|. \tag{2.9}$$

Păstrând un balans între $|\omega|$ şi ε, deducem că membrul drept al inegalităţii (2.9) poate fi făcut oricât de mic. Revenind la relaţiile (2.7) şi (2.8), demonstraţia lemei este încheiată. □

2.3.2 Demonstraţia teoremei de multiplicitate

Pentru a încheia demonstraţia Teoremei 2.1, aplicăm teorema celor trei puncte critice a lui Pucci şi Serrin, cf. [75, Corollary 1] în versiunea generalizată demonstrată de Bonanno [18, Theorem 2.3 şi Remark 2.2]. Pe scurt, această proprietate spune că dacă E este o funcţionala de clasă C^1 cu valori reale definită pe un spaţiu Banach care satisface condiţia Palais-Smale şi are două puncte de minim local, atunci E are cel puţin trei puncte critice.

Conform teoremei celor trei puncte critice, definim funcţionalele $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin

$$\mathcal{F}_1(s) = \inf\left\{\frac{\inf_{B(v)=s} A(v) - A(u)}{B(u) - s};\ B(u) < s\right\}$$

şi

$$\mathcal{F}_2(s) = \sup\left\{\frac{\inf_{B(v)=s} A(v) - A(u)}{B(u) - s};\ B(u) > s\right\}.$$

Observăm că

$$\limsup_{s\nearrow 0} \mathcal{F}_1(s) \leq \mathcal{F}_1(0) \tag{2.10}$$

şi

$$\liminf_{s\nearrow 0} \mathcal{F}_2(s) = +\infty. \tag{2.11}$$

Fie $\Lambda := \mathcal{F}_1(0)$. Relaţiile (2.10) şi (2.11) combinate cu teorema celor trei puncte critice implică faptul că E are cel puţin două puncte critice netriviale pentru orice $\lambda > \Lambda$.

Demonstraţia teoremei este acum încheiată. □

2.4 Comentarii

(i) Probleme neliniare cu creştere variabilă au fost studiate odată cu lucrările de pionierat ale lui Marcellini [44, 45]. Contribuţii importante în analiza regularităţii soluţiilor i se datorează lui Mingione *et al.* [10, 24, 25] şi Rădulescu *et al.* [22, 58, 79]. In toate aceste lucrări, problemele cu fază dublă sunt descrise de *operatori diferenţiali* cu creştere variabilă, în timp ce cazul studiat de noi în acest capitol este diferit şi corespunde unei *reacţii* cu creştere variabilu a în origină şi la infinit.

(ii) Analizând demonstraţia Teoremei 2.1 observăm că argumente similare pot fi folosite pentru orice domeniu (mărginit sau nemărginit) din $\mathbb{R}^N$ astfel încât inegalitatea lui Poincaré este satisfăcută, de pildă domenii care sunt mărginite într-o direcţie (cilindri, domenii nemărginite cu măsură Lebesgue finită, etc.).

(iii) Teorema celor trei puncte critice a lui Pucci şi Serrin şi condiţia de compacitate Palais-Smale trebuie să fie privite în strânsă relaţie cu teorema *mountain pass* a lui Ambrosetti şi Rabinowitz [6]. Detalii suplimentare pot fi găsite în lucrările [73, 74], în special legate de aplicarea teoremei *mountain pass* în analiza calitativă a ecuaţiilor cu derivate parţiale.

(iv) Versiunea extinsă a teoremei celor trei puncte critice stabilită de Bonanno [18, Theorem 2.3 şi Remark 2.2] este asociată unei teorii generale pentru a verifica dacă o ecuaţie de tip Euler-Lagrange admite cel puţin trei soluţii.

(v) Analizând demonstraţia Lemei 2.2, observăm că aceeaşi concluzie rămâne valabilă dacă perturbarea $f(u)$ în problema (2.3) are o creştere "aproape critică", în sensul că

$$|f(u)| = o(|u|^{p^*-1}) \text{ dacă } |u| \to \infty.$$

(vi) O interesantă problemă deschisă este să se studieze fenomene similare de perturbare dacă operatorul p-Laplace este înlocuit cu următorul operator diferenţial neomogen, introdus de Stuart [84]:

$$\operatorname{div}\left[\gamma\left(\frac{u^2+|\nabla u|^2}{2}\right)\nabla u\right],$$

unde $\gamma : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi pozitivă care satisface numite ipoteze foarte generale.