

Capitolul 1

Introducere

Problema turbulenței este recunoscută a fi una din problemele remarcabile ale fizicii și o întâlnim aproape peste tot. Curgeri turbulente complexe există atât în mediul nostru natural (oceane, râuri, atmosferă, în plămânii omului), cât și în mediile industriale produse de om (când zboară un avion, conducem o mașină, încălzim sau răcim o casă, ardem cărbune în furnale, precum și la curgerea sângelui prin valvele inimii protetice). Curgerea turbulentă reprezintă în multe cazuri fizica dominantă pe toate scalele universului cunoscut, de la interiorul celulelor biologice până la scalele galactice și supergalactice.

Înțelegerea comportării turbulente în curgerea fluidelor este o problemă importantă și în același timp intrigantă. *Problema turbulenței* rămâne până în zilele noastre o problemă nerezolvată a fizicii matematice clasice. Încă nu avem o înțelegere completă și detaliată a modului în care apare turbulența și modelele teoretice nu au încă un grad foarte mare de predictibilitate. Este de menționat faptul că problema ecuației Navier-Stokes (dacă există soluții și dacă ele sunt unice) a fost inclusă pe lista problemelor lansată de Clay Math pentru a căror rezolvare se oferă un premiu de 1 milion \$.

Studiul turbulenței este motivat atât de provocarea intelectuală cât și de utilitatea practică a înțelegerii sale. Efectele turbulenței în cazul plasmei de fuziune creează mari probleme în confinarea plasmei și constituie un subiect intens analizat. Un factor esențial în progresul realizării unor modele fizice și ingineresti ce oferă o predictibilitate satisfăcătoare este dat de progresul realizat în simulările numerice, ceea ce face ca studiul *simulărilor numerice în fizica turbulenței* să fie un domeniu de mare interes.

Recunoașterea turbulenței ca fenomen fizic distinct este marcată de schițele și observațiile facute de Leonardo da Vinci (prin anul 1500). Este remarcabilă și astăzi descrierea făcută de acesta : " ... cele mai mici vârtejuri sunt adesea fără număr, și obiecte mari sunt rotite doar de vârtejuri mari și nu de cele mici, iar lucrurile mici sunt rotite atât de vârtejurile mici cât și de cele mari."

Aceste fenomene au fost numite de Leonardo da Vinci "*turbolenza*", care se află la originea denumirii de astăzi pentru acest tip de curgere a fluidelor.

A trebuit să treacă însă o lungă perioadă de timp până când să se facă progrese în studiul curgerii turbulente. O etapă importantă (spre mijlocul secolului XIX) este elaborarea de către Claude-Louis Navier și George Gabriel Stokes a ecuațiilor de curgere a fluidelor vâscoase, cunoscute azi ca *ecuațiile Navier-Stokes*. În anul 1877 Joseph Valentin Boussinesq a emis ipoteza că *tensiunile turbulente sunt proporționale liniar cu ratele medii de deformare*, ipoteză care încă este o piatră unghiulară a majorității modelelor turbulenței.

Osborne Reynolds a fost primul care a investigat sistematic (aprox 1880) *tranziția* de la curgerea laminară la curgerea turbulentă prin injectarea unui marker colorat sub formă de bandă într-un curent dintr-o conductă cu pereți transparenți. Experimentele lui Reynolds și celebrul său articol din 1894 [2] sunt printre cele mai influente rezultate privind turbulența. Observațiile sale

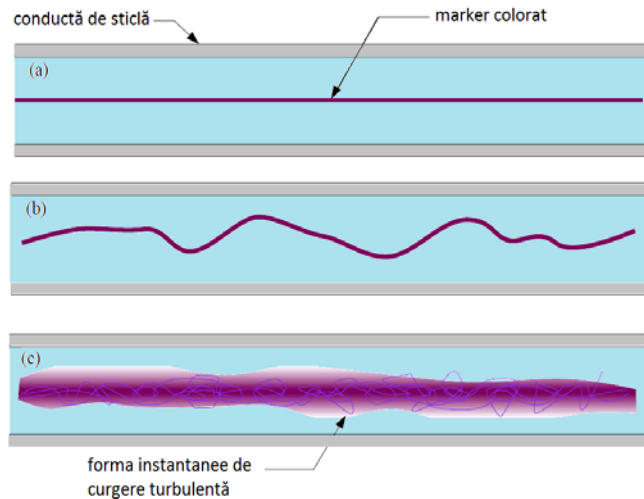


Figura 1.1: Sunt schițate 3 regimuri de curgere identificate în experimentele Reynolds când numărul Re este variat.

au condus la identificarea unui singur *parametru dimensional*, numit acum *numărul Reynolds* și notat Re ,

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu} \quad (1.1)$$

ce caracterizează complet comportarea curgerii în această situație. În această expresie ρ este densitatea fluidului, μ este vâscozitatea dinamică iar ν este

vâscozitatea cinematică. U este o scală de viteză (adică o valoare tipică a vitezei, să zicem viteza medie), iar L este o scală de lungime tipică, spre exemplu raza conductei prin care curge fluidul. Astfel Re exprimă importanța relativă a forțelor vâscoase și a forțelor inerțiale.

În figura 1.1(a) este prezentată curgerea laminară corespunzătoare lui $Re \lesssim 2000$ pentru care markerul colorat injectat în curent se poate mixa cu fluxul principal de apă doar prin *difuzie moleculară*. Acest proces este în general foarte lent comparativ cu viteza de curgere încât se mixează foarte puțin și deci banda de marker apare foarte puțin difuzată de-a lungul tubului conținând apa ce curge. Figura 1.1(b) arată o stare tranzițională timpurie a curgerii ($2000 \lesssim Re \lesssim 2300$) pentru care banda marker devine ondulată, dar această curgere este încă laminară cum este indicat de faptul că linia este în mod clar identificabilă având loc doar o ușoară mixare a markerului în apă.

Curgerea turbulentă este indicată în figura 1.1(c). Aici vedem că liniile instantanee de curgere (diferite acum față de linia markerului) schimbă direcția în mod haotic, iar markerul este amestecat în mod semnificativ cu apa. Sunt câteva aspecte de notat în această privință:

(a) Primul aspect, *creșterea mixării*, este o caracteristică importantă a turbulenței. Acest lucru este adesea urmărit în procesele ingineresti, ca de exemplu, amestecarea reactanților în procesul de combustie, sau simpla mixare a fluidelor pe durata agitării.

(b) Al doilea aspect este a observa că această mixare conduce până la urmă la același rezultat ca și difuzia moleculară, dar pe o scală de timp mult mai rapidă. Astfel, se zice adesea că turbulența "sporește difuzia", și acest punct de vedere conduce la o abordare particulară de modelare a turbulenței. Deși rezultatul final al mixării turbulente este același ca al mixării difuzive, mecanismele fizice sunt foarte diferite. În fapt, turbulența apare când efectele difuziei moleculare sunt destul de mici comparate cu cele ale transportului macroscopic.

Cauza inițială a tranziției la turbulență poate fi explicată prin studiul problemei *instabilității hidrodinamice* sau, alternativ, a stabilității curgerii laminare la micile perturbații. Un interes special din punct de vedere ingineresc este acordat predicției valorii numărului Reynolds critic la care perturbațiile sunt amplificate și a numărului Reynolds la care are loc tranziția către starea de turbulență completă.

Acestei complexe probleme de tranziție către turbulență i-au fost dedicate multe lucrări atât teoretice (fundamente matematice și fizice) cât și experimentale, vezi spre exemplu [3], [4], [5], [6]. În prezenta lucrare nu vom discuta acest subiect, ci vom considera că starea turbulentă este complet instalată (numărul Reynolds este suficient de mare).

Deși nu dispunem de o definiție exactă a turbulenței, știm unele din caracteristicile definitorii ale turbulenței:

(1) Caracterul *aleatoriu*: Curgerile turbulente apar neregulate, haotice și nepredictibile chiar dacă sunt impuse condiții de frontieră constante. Viteza și toate celelalte proprietăți de curgere variază în mod aleatoriu și haotic.

(2) *Domeniu foarte larg al scalelor* de lungime și de timp (dar astfel încât cele mai mici scale sunt încă suficient de mari pentru a satisface ipoteza continuuului);

(3) *Intermitență* atât în timp cât și în spațiu. Acest lucru este legat de procentul de timp în care un flux prezintă un comportament temporal neregulat la orice locație spațială selectată.

(4) Caracterul *neliniar*: Curgerile turbulente sunt puternic neliniare.

(5) Caracterul *difuziv*: Datorită mixării macroscopice a particulelor de fluid, curgerile turbulente sunt caracterizate printr-o rată rapidă de difuzie a impulsului și căldurii.

(6) *Disiparea*: Mecanismul de deformare a vârtejurilor transferă energie și vorticitate între vârtejuri.

(7) *Vorticitatea*: Turbulența este caracterizată printr-un înalt nivel de vorticitate fluctuantă. Structurile identificabile într-o curgere turbulentă sunt vag numite *vârtejuri*. Vizualizarea fluxului turbulent arată diferite structuri: amalgamare, divizare, deformare și mai ales rotire. O trăsătură caracteristică a turbulenței este existența unui enorm domeniu de mărimi a vârtejurilor.

Studiul turbulenței a constituit o provocare căreia i-au răspuns multe nume celebre de matematicieni, fizicieni și ingineri pe întreg parcursul secolului 20: Henri Poincaré, Ludwig Prandtl, G. I. Taylor, Theodore von Kármán, Leslie Howarth, Andrey Kolmogorov, L. D. Landau, Edward Lorenz, V. Arnold, David Ruelle, Ciprian Foias, Floris Takens, Brian Launder și alții. Interesanta evoluție a concepțiilor, experimentelor și teoriilor turbulenței poate fi găsită în lucrări precum G. T. Chapman and M. Tobak (1985) [1], J. M. McDonough (2007) [9], or in the book "A Voyage through turbulence" [10]. Există un foarte mare număr de cărți și articole ce au ca obiect de studiu turbulența. Unele punând accent pe fundamentele matematice [12], altele pe fizica turbulenței [11], [21], modelarea ecuațiilor și aspectele computaționale [15], [19].

În mare, se disting trei concepții în abordarea studiului turbulenței: concepția statistică, concepția structurală și concepția deterministă. În prezenta lucrare vom prezenta problema turbulenței din perspectiva concepției *statistice* prin intermediul ecuațiilor Navier-Stokes. Asta nu înseamnă că perspectiva deterministă ar fi mai puțin interesantă, conceptul de 'turbulență și haos deterministic' fiind tot mai des prezent în literatura de specialitate și simulările numerice. Din punct de vedere al simulărilor numerice, vor fi prezentate caracteristicile esențiale ale celor două concepții principale de simulări numerice ale turbulenței: simularea numerică directă DNS (Direct Numerical Simulation) și simularea de vârtej mare LES (Large Eddy Simulation). În ultimul capitol vor fi făcute referiri la câteva metode numerice aplicate cu precădere în LES.

Capitolul 2

Cascada directă de energie și ipotezele Kolmogorov

În examinarea curgerilor fără forfecare se observă că mișcările turbulente au un domeniu larg de scale spațiale, începând de la scale mari precum lărgimea fluxului spre scale care devin progresiv mai mici. Să vedem cum sunt distribuite energia și anizotropia între diferitele scale ale mișcării și care sunt diferitele procese fizice ce apar pe aceste scale. În această discuție apar două teme și anume: *cascada de energie* și *ipotezele Kolmogorov*.

Ideea cascadei de energie (introdusă de Richardson în 1922) este că energia cinetică intră în turbulență (prin mecanismul de producere) la scalele cele mai mari ale mișcării. Această energie este apoi transferată la scale din ce în ce mai mici până când, la cea mai mică scală, energia este disipată prin acțiunea vâscozității.

Kolmogorov (1941) [7] a completat și a cuantificat această descriere identificând cele mai mici scale ale turbulenței (care acum sunt numite scale Kolmogorov). Vom considera un flux complet turbulent cu număr Reynolds mare,

$$\text{Re} = \frac{u\mathcal{L}}{\nu}$$

de viteză caracteristică u și scală de lungime \mathcal{L} , vezi și ecuația (1.1).

2.1 Cascada de energie

Primul concept al lui Richardson pentru cascada de energie a fost că turbulența poate fi considerată a fi compusă din *vârtejuri* de diferite mărimi. Un vârtej de mărime ℓ are o viteză caracteristică $u(\ell)$ și scala de timp

$$t(\ell) = \frac{\ell}{u(\ell)}$$

Un vârtej nu poate fi precis definit, dar este conceput a fi o mișcare turbulentă localizată în interiorul unei regiuni de mărime ℓ și care este cel puțin moderat coerentă pe această regiune. O regiune ocupată de un vârtej mare poate să conțină, de asemenea, vârtejuri mai mici.

Vârtejurile de cea mai mare mărime sunt caracterizate printr-o scală de lungime ℓ_0 care este comparabilă cu scala de curgere \mathcal{L} și viteza lor caracteristică $u_0 \equiv u(\ell_0)$ este de ordinul rădăcinii pătrate a intensității turbulenței

$$u_0 \sim u' \equiv \left(\frac{2}{3}k\right)^{1/2}$$

care este comparabilă cu \mathcal{U} . Aici k este energia cinetică turbulentă și u' este viteza pătratică medie. Numărul Reynolds al acestor vârtejuri

$$\text{Re}_0 = \frac{u_0 \ell_0}{\nu} \quad (2.1)$$

este mare (adică comparabil cu Re) astfel încât efectele directe ale vâscozității sunt neglijabil mici.

Idea de bază a lui Richardson este că vârtejurile mari sunt instabile și se rup, transferând energia lor la vârtejuri mai mici. Aceste vârtejuri suferă la rândul lor un proces similar de rupere și transferă energia lor unor vârtejuri și mai mici. Această *cascadă directă de energie* în care energia este transferată unor vârtejuri succesiv mai mici continuă până când numărul Reynolds

$$\text{Re}(\ell) \equiv \frac{u(\ell)\ell}{\nu}$$

este suficient de mic încât mișcarea vârtejurii este stabilă și vâscozitatea moleculară este eficientă în disiparea energiei cinetice. Un motiv pentru care această descriere este importantă este faptul că ea plasează disiparea la sfârșitul unui șir de procese. Rata de disipare ϵ este determinată așadar de primul proces din secvență, care este transferul de energie de la cel mai mare vârtej. Aceste vârtejuri au energia de ordinul u_0^2 și scala de timp $t_0 = \ell_0/u_0$ astfel încât rata de transfer a energiei poate fi presupusă a fi de scală

$$\frac{u_0^2}{t_0} = \frac{u_0^3}{\ell_0}$$

Prin urmare, în consistență cu observațiile experimentale din curgerile fără forfecare, această descriere a cascadei de energie indică faptul că ϵ se scalează ca

$$\epsilon \sim \frac{u_0^3}{\ell_0} \quad (2.2)$$

independent de ν (numărul Reynolds fiind considerat mare).

Capitolul 3

Ecuatiile fundamentale de curgere a unui fluid vâscos

Vor fi prezentate aici pe scurt principalele ecuații ce descriu curgerea unui fluid cu vâscozitate. De menționat că pe întreg parcursul acestei lucrări ne vom raporta la un sistem de coordonate cartezian (deci ortogonal), spre deosebire de fizica plasmei de fuziune unde adesea se folosesc sisteme de coordonate curbilinii uneori neortogonale.

Detalii despre deducerea ecuațiilor fundamentale de curgere a unui fluid vâscos și discuția lor poate fi găsită în bogata literatură de specialitate, ca spre exemplu în [13], [14], [16].

3.1 Ecuația de continuitate

Ecuația de continuitate, sau ecuația de conservare a masei, este scrisă în forma vectorială ca

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (3.1)$$

sau, cu regula de contracție a indicilor muți,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j)}{\partial X_j} = 0 \quad (3.2)$$

Dacă fluidul este incompresibil, atunci în timpul curgerii densitatea fluidului ρ rămâne constantă atât în spațiu

$$\nabla \rho = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial X_j} = 0$$

cât și în timp,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Din ecuația de continuitate (3.1), sau (3.2), rezultă atunci că în cazul unui fluid incompresibil câmpul vitezei este de divergență nulă

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\partial u_j}{\partial X_j} = 0 \quad (3.3)$$

În cazul lichidelor condiția de incompresibilitate este destul de bine îndeplinită, dar în cazul gazelor (în particular în fizica proceselor atmosferice) este nevoie să ținem cont de variația densității și prin urmare va fi aplicată ecuația (3.1) în forma ei completă.

3.2 Ecuația impulsului

Ecuația impulsului stabilește o relație între accelerația "particulei" de fluid, $D\vec{u}/Dt$, și forța rezultantă (pe unitatea de masă) formată din forțele de suprafață și forțele de volum.

Forțele de suprafață (de origine moleculară) sunt exprimate prin presiunea statică p și tensorul tensiunilor $\tau_{ij}(\vec{x}, t)$ datorat vâscozității, vezi termenul (1), respectiv (3) din ecuația (3.4).

Dintre forțele de volum amintim forța gravitațională, forța centrifugă, forța Coriolis și forțele electromagnetice, dar în cele ce urmează vom reține dintre acestea doar forța gravitațională, vezi termenul (2) din ecuația (3.4). Forța centrifugă și forța Coriolis trebuie luate în considerare la studiul mișcării atmosferice, iar forțele electromagnetice joacă un rol important în cazul plasmei magnetizate.

Ecuația vectorială a impulsului va conduce la trei ecuații scalare ($j = 1, 2, 3$), corespunzătoare sistemului de coordonate ales:

$$\rho \frac{Du_j}{Dt} = - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial X_i}}_{(1)} \delta_{ij} + \underbrace{\rho g_i}_{(2)} \delta_{ij} + \underbrace{\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial X_i}}_{(3)} \quad (3.4)$$

unde derivata D/Dt este *derivata substanțială*

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial X_i} \quad (3.5)$$

Prin urmare, derivata substanțială a vitezei \vec{u} este

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} \equiv \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$$

3.2.1 Fluide Newtoniene

Pe la sfârșitul secolului XVII Isaac Newton a afirmat că tensorul tensiunii de forfecare τ_{ij} într-un fluid este proporțional cu gradientii vitezelor. Aceste fluide sunt numite *normal vâscoase* sau *fluide newtoniene*. Pentru astfel de fluide, Stokes a obținut în 1845 că

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial X_k} \delta_{ij} \quad (3.6)$$

unde μ este coeficientul de vâscozitate moleculară și λ este coeficientul de vâscozitate volumică (aparentă). Stokes a făcut ipoteza că

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (3.7)$$

care este frecvent folosită (dar care nu a fost încă pe deplin confirmată).

Înlocuind (3.7) în (3.6) rezultă

$$\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial X_k} \delta_{ij} \right] \quad (3.8)$$

În aproximația de fluid newtonian incompresibil tensorul tensiunilor va fi de forma

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (3.9)$$

deoarece câmpul de viteze este de divergență nulă, vezi (3.3).

În locul tensorului tensiunilor este utilizat adesea tensorul deviator simetric *rata de deformare* S_{ij} definit ca,

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (3.10)$$

Folosind rata de deformare S_{ij} în ecuația (3.8), tensorul tensiunilor vâscoase se va scrie

$$\tau_{ij} = \mu \left(2S_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} S_{kk} \right) \quad (3.11)$$

3.2.2 Ecuațiile Navier-Stokes

Având în vedere ecuația de continuitate (3.2) și ecuația (3.11) putem scrie ecuațiile de impuls sub forma conservativă

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial X_i} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial X_j} + \rho g_j + \frac{\partial}{\partial X_i} \left[\mu \left(2S_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} S_{kk} \right) \right] \quad (3.12)$$

numite tradițional *ecuațiile Navier-Stokes*. Privind această denumire trebuie însă precizat că în literatura modernă de dinamica fluidelor computațională (CFD), terminologia de ecuații Navier-Stokes include uneori întregul sistem de ecuații format din ecuația de continuitate (3.2), ecuația de impuls (3.12) și ecuația de energie (3.30), împreună cu ecuația (3.11) ce exprimă tensorul tensiunilor.

Dacă fluidul este incompresibil $S_{kk} = \partial u_k / \partial X_k = 0$ și ecuația (3.12) devine

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial X_i} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial X_j} + \rho g_j + 2\mu \frac{\partial S_{ij}}{\partial X_i} \quad (3.13)$$

sau, înlocuind S_{ij} din (3.10), rezultă

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial X_i} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial X_j} + \rho g_j + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial X_i \partial X_i} \quad (3.14)$$

Ecuațiile Navier-Stokes pentru un fluid incompresibil se scriu în așa-numita formă neconservativă ca

$$\rho \frac{Du_j}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial X_j} + \rho g_j + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial X_i \partial X_i} \quad (3.15)$$

sau

$$\frac{Du_j}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial X_j} + g_j + \nu \frac{\partial^2 u_j}{\partial X_i \partial X_i} \quad (3.16)$$

unde $\nu = \mu/\rho$ este *coeficientul cinematic de vâscozitate*. În forma vectorială, ecuația (3.16) se va scrie

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (3.17)$$

Este de asemenea util a scrie ecuațiile Navier-Stokes (3.16) în funcție de tensorul tensiunilor (3.9):

$$\frac{Du_j}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial X_j} + g_j + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial X_i} \quad (3.18)$$

Dacă dorim să ținem cont de variația densității, în ipoteza că ea variază doar cu temperatura, putem scrie ecuația (3.18) sub forma

$$\rho \frac{Du_j}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial X_j} + \rho_0 g_i [1 - \beta (T - T_0)] \delta_{ij} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial X_i} \quad (3.19)$$

unde β este un coeficient care arată cât de repede descrește densitatea cu temperatura în direcția i , iar cu ρ_0 am notat densitatea la temperatura de referință T_0 . În fizica atmosferică $g_i = -g$ pe direcția verticală și zero pe celelalte două direcții. Dacă dorim să ținem cont de variația densității cu temperatura, vom înlocui de aici înainte ρg_j cu $\rho g_i [1 - \beta (T - T_0)] \delta_{ij}$:

$$\rho g_j \longrightarrow g_i \rho_0 [1 - \beta (T - T_0)] \delta_{ij} \quad (3.20)$$

3.3 Ecuația de vorticitate

O caracteristică importantă a fluxurilor turbulente este că ele sunt *rotaționale* (adică au vorticitatea nenulă). Vorticitatea este definită ca rotorul vitezei

$$\vec{\omega}(\vec{X}, t) = \nabla \times \vec{u} \quad (3.21)$$

și este egală cu de două ori rata de rotație a fluidului la (\vec{X}, t) . Aplicând operatorul *rotor* ecuației Navier-Stokes (3.17) vom obține ecuația de evoluție a vorticității

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \nu \nabla^2 \vec{\omega} + (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} \quad (3.22)$$

sau, pe componente,

$$\frac{D\omega_i}{Dt} = \nu \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial X_l \partial X_l} + \omega_l \frac{\partial u_i}{\partial X_l} \quad (3.23)$$

unde

$$\omega_i = \varepsilon^{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x^j} \quad (3.24)$$

Problema 1 *Deduceți ecuația (3.22).*

Pentru fluxurile bidimensionale (2D) termenul de deformare a vortexului se anulează și ecuația vorticității (3.22) devine

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu \nabla^2 \omega \quad (3.25)$$

Problema 2 *Să se demonstreze că pentru fluxurile bidimensionale vorticitatea are o singură componentă nenulă care verifică ecuația (3.25).*

Cum componentele ratei de deformare nu apar în cazul 2D rezultă că în mod riguros turbulența nu poate fi 2D. Când se discută de o turbulență 2D aceasta este o aproximație a celei 3D în sensul că una din dimensiuni este mult mai mică decât celelalte două, dar în realitate nu este riguros plană. Turbulența 2D este un subiect vast cu un interes deosebit pentru fluxurile atmosferice și oceanografice. Ea are multe comportări particulare pe care nu le întâlnim la turbulența 3D, vezi spre exemplu [25], [26].

Capitolul 4

Descriptori statistici ai turbulenței

4.1 Funcția densitate de probabilitate

Analiza statistică a structurilor turbulente se realizează prin intermediul funcției densitate de probabilitate și prin diferitele corelații ale variabilelor turbulente.

Funcția densitate de probabilitate (*pdf = probability density function*), numită de asemenea *funcția distribuție de probabilitate*, sau simplu *funcția de distribuție*, descrie probabilitatea de apariție a valorilor unei funcții date pe un anumit domeniu al funcției. Vom nota aici *pdf*-ul unei funcții u ca $f(u)$. Mai precis, $f(u)du$ este probabilitatea ca o anumită valoare specificată să se găsească între u și $u + du$, și $f(u)$ satisface condiția de normare

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = 1 \quad (4.1)$$

Fie de exemplu u viteza instantanee dintr-o problemă unidimensională (sau o componentă a vitezei dintr-o problemă bi sau tri-dimensională). Un exemplu de istorie temporală a componentei vitezei u este arătată în figura 4.1.

Istoria fluctuațiilor instantanee poate fi exprimată prin intermediul funcției distribuție de probabilitate $f(u)$. Pentru Δu suficient de mic, mărimea $f(u)\Delta u$ reprezintă probabilitatea de a găsi valoarea vitezei instantanee u în intervalul $(u, u + \Delta u)$ adică,

$$f(u) \Delta u = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_i \Delta t_i \quad (4.2)$$

unde Δt_i sunt intervalele de timp în care u se află în intervalul $(u, u + \Delta u)$, vezi figura 4.1. (În figură intervalele Δu și Δt sunt luate destul de mari din

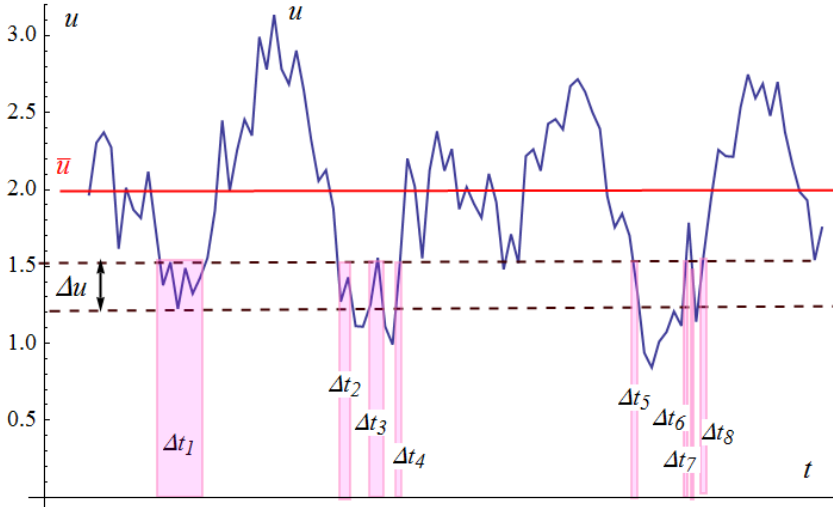


Figura 4.1: Este reprezentată variația în timp a vitezei instantanee $u(t)$ cu valoarea medie \bar{u} calculată ca medie temporală. Sunt marcate intervalele de timp Δt_i în care valoarea vitezei instantanee $u(t)$ se află în intervalul $(u, u + \Delta u)$.

motive grafice, dar ele trebuie gândite a fi mult mai mici.) Dacă înmulțim (4.2) prin u , facem intervalele Δu infinitezimale ($\Delta u \rightarrow du$) și integrăm, reobținem definiția (4.16) a mediei temporale.

Pentru a construi funcția distribuție de probabilitate $f(u)$ se măsoară diferitele momente ale ei în raport cu variabila aleatoare u , ca de exemplu valoarea medie, varianța, asimetria, excesul (sau platitudinea). Din măsurarea acestor momente se poate construi $f(u)$ care apare ca nucleu în integralele ce exprimă momentele funcției de distribuție a variabilei u . Exemple de funcții de distribuție sunt date în Anexa A.

4.1.1 Valoarea medie

Valoarea medie temporală a unei funcții $u(t)$ se poate calcula cu ajutorul funcției densitate de probabilitate $f(u)$ și din acest punct de vedere reprezintă *momentul de ordin unu* al funcției de distribuție:

$$\bar{u} = \int_{-\infty}^{\infty} v f(v) dv = \frac{1}{T} \int_0^T u dt \quad (4.3)$$

unde v este o variabilă aleatoare de integrare.

4.1.2 Variația și deviația standard

Descriptorii folosiți pentru a indica extinderea (împrăștierea) unei fluctuații \tilde{u} în jurul valorii medii U sunt *varianța* σ^2 și *deviația standard* σ .

Varianța unei variabile stohastice u este definită ca momentul de ordinul doi al deviației variabilei u față de media sa U , adică *momentul de ordinul doi* al deviației $u - U = \tilde{u}$,

$$var(u) \equiv \overline{\tilde{u}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (v - U)^2 f(v) dv \quad (4.4)$$

Prin urmare ea măsoară cât de departe sunt împrăștiate setul de valori aleatoare față de valoarea lor medie. Variația pentru componentele vitezei are o însemnătate specială. Astfel, dacă \tilde{u} , \tilde{v} și \tilde{w} sunt componentele fluctuante ale vitezei pe cele trei direcții ale sistemului de referință, atunci

$$k = \frac{1}{2} (\overline{\tilde{u}^2} + \overline{\tilde{v}^2} + \overline{\tilde{w}^2})$$

reprezintă *energia cinetică turbulentă* pe unitatea de masă într-un punct dat.

Deviația standard pentru o variabilă stohastică u , notată σ_u , este definită ca

$$\sigma_u \equiv \sqrt{\overline{\tilde{u}^2}} \quad (4.5)$$

Prin urmare

$$var(u) = \sigma_u^2$$

Momentul central de ordin n este definit ca

$$\mu_n \equiv \langle \tilde{u}^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (v - U)^n f(v) dv \quad (4.6)$$

Problema 3 Fie q o mărime stohastică definită prin relația

$$q = a + bu \quad (4.7)$$

unde u este o variabilă aleatoare cu $u = U + \tilde{u}$, iar a și b sunt constante. Arătați că

$$var(q) = b^2 var(u) \quad (4.8)$$

$$\sigma_q = b\sigma_u \quad (4.9)$$

$$var(u) = \overline{\tilde{u}^2} - U^2 \quad (4.10)$$

4.1.3 Standardizare

Adesea este convenabil a lucra în termenii variabilelor aleatoare standardizate, care prin definiție au media zero și varianța unitate. Variabila aleatoare standardizată \hat{u} ce corespunde variabilei aleatoare u este

$$\hat{u} = \frac{u - U}{\sigma_u} \quad (4.11)$$

Funcția de distribuție standardizată a variabilei u este definită prin

$$\hat{f}(\hat{v}) = \sigma_u f(U + \sigma_u \hat{v}) \quad (4.12)$$

Momentele variabilei \hat{u} sunt

$$\hat{\mu}_n = \frac{\langle \hat{u}^n \rangle}{\sigma_u^n} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}^n f(\hat{v}) d\hat{v} \quad (4.13)$$

4.1.4 Asimetria (*skewness*)

Asimetria este o măsură pentru asimetria unei funcții *pdf* în raport cu originea (sau față un alt reper). Asimetria poate lua atât valori pozitive cât și valori negative. În experimentele de turbulență ea este de obicei negativă (dar nu totdeauna).

Asimetria unei funcții $\tilde{u} \in L^3$ este calculată din formula

$$S(u) = \frac{\langle \tilde{u}^3 \rangle}{\langle \tilde{u}^2 \rangle^{3/2}} \quad (4.14)$$

și reprezintă așadar momentul standardizat de ordin trei.

Asimetria este o măsură a asimetriei unei funcții (în raport cu media sa, de obicei zero în contextul studiilor turbulenței) așa cum este indicat fie din forma funcției distribuție de probabilitate, fie prin observația directă a seriei temporale de date. O distribuție, sau o serie de date, este simetrică dacă ea apare la fel la stânga și la dreapta punctului central.

Dacă funcția distribuție de probabilitate este simetrică (ca în cazul unei Gaussiene), asimetria este zero (vezi Anexa A).

Pentru un set de date $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ formula pentru asimetrie este

$$S = \frac{1}{\sigma_u^3} \sum_{i=1}^n \frac{(u_i - U)^3}{n}$$

unde σ_u este deviația standard, U este valoarea medie și n este numărul de valori din setul de date. Această formulă este cunoscută ca formula coeficientului Fisher-Pearson pentru asimetrie. Multe programe software calculează de

fapt coeficientul ajustat Fisher-Pearson pentru asimetrie

$$G_1 = \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n-2} \frac{1}{\sigma_u^3} \sum_{i=1}^n \frac{(u_i - U)^3}{n}$$

Valoarea negativă a coeficientului de asimetrie indică faptul că valorile datelor sunt majoritar în partea stângă față de valoarea medie U , iar o valoare pozitivă a coeficientului de asimetrie indică faptul că valorile din setul de date sunt majoritar în partea dreaptă față de valoarea medie U .

4.1.5 Platitudinea (*kurtosis*)

Momentul standardizat de ordin patru este numit *platitudine* sau *aplatizare* (*kurtosis*):

$$K(u) = \frac{\langle \tilde{u}^4 \rangle}{\langle \tilde{u}^2 \rangle^2} \quad (4.15)$$

unde $\tilde{u} \in L^4$ și $\langle \cdot \rangle$ notează orice tip de medie (în majoritatea cazurilor este media temporală).

Pentru un set de date $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ formula pentru platitudine este

$$K = \frac{1}{\sigma_u^4} \sum_{i=1}^n \frac{(u_i - U)^4}{n}$$

unde σ_u este deviația standard, U este valoarea medie și n este numărul de valori din setul de date.

Platitudinea (uneori numită "exces") este totdeauna mai mare ca zero, iar platitudinea unei Gaussiene este exact egală cu 3. În multe lucrări aplatizarea este definită prin $K - 3$. În acest caz ea ne indică abaterea funcției densitate de probabilitate de la o Gaussiană, în sensul că funcțiile având valori de platitudine mari sunt mai puternic ascuțite decât cele care sunt distribuții Gaussiene, și invers.

Tennekes și Lumley (1972) [17] au remarcat faptul că valorile platitudinii sunt mari (comparate cu valoarea 3 pentru o distribuție Gaussiană) dacă *pdf* are valori relativ mari în cozile sale, adică dacă nu tinde la zero la fel de repede ca o Gaussiană atunci când argumentul său tinde la $\pm\infty$. Acest lucru apare când seriile temporale ale funcției conțin un număr semnificativ de vârfuri ascuțite, și este legat de intermitență, așa cum a remarcat Frish (1995) [18].

În particular, o funcție filtrată cu un filtru trece-sus se zice a fi *intermitentă pe scale mici* dacă platitudinea sa crește fără limite odată cu creșterea frecvenței de filtrare. Notăm de asemenea că platitudinea este momentul de ordin patru al unei funcții divizată prin pătratul momentului de ordin doi. Deci, ea poate fi calculată în termenii funcției densitate de probabilitate.

Capitolul 5

Ecuatiile fundamentale ale curgerii turbulente

Vom prezenta în continuare ecuațiile fundamentale ce descriu curgerea turbulentă a unui fluid incompresibil (făcând uneori observații și asupra variantei de fluid compresibil). Într-o curgere turbulentă variația mărimilor fizice are loc pe o scală de timp rapidă iar fluctuațiile lor sunt stocastice.

Domeniul scadelor ce trebuie rezolvate este enorm, cu cele mai mici scale spațiale de ordinul milimetrilor și cele mai mici scale temporale de ordinul milisecundelor. Este prin urmare foarte dificil (și nu prea folositor) de a cunoaște valorile instantanee ale mărimilor fizice. În schimb ne interesează efectul mediu al mărimilor turbulente, și o abordare practică pentru descrierea curgerilor turbulente este de a modela mărimile de transport turbulent mediate.

Am văzut în capitolul anterior tipurile de medieri pe care le putem avea, deocamdată însă ne vom referi doar generic la procesul de mediere. Metoda de studiu a turbulenței aleasă aici este metoda statistică prin ecuațiile Navier-Stokes mediate Reynolds - notate pe scurt RANS (acronim de la Reynolds Averaged Navier-Stokes).

5.1 Ecuatiile Navier-Stokes mediate

Descompunerea Reynolds definește mărimea instantanee ca fiind egală cu suma dintre valoarea sa medie și valoarea sa fluctuantă. Pentru o mărime fizică arbitrară a , partea mediată va fi notată cu \bar{a} (o bară deasupra simbolului mărimii respective), iar partea fluctuantă o vom nota cu \tilde{a} . Astfel,

$$\begin{aligned} p &= P + \tilde{p}, \quad T = \bar{T} + \tilde{T} \\ u_i &= U_i + \tilde{u}_i, \quad \tau_{ij} = \bar{\tau}_{ij} + \tilde{\tau}_{ij} \end{aligned}$$

unde p , T , u_i și τ_{ij} se referă respectiv la valorile instantanee ale presiunii, temperaturii, componenteii i a vitezei și tensorului tensiunilor.

Prin medierea ecuației de continuitate (3.3) pentru fluidul incompresibil obținem

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_i} = 0 \quad (5.1)$$

Medierea ecuațiilor Navier-Stokes (3.18) conduce la

$$\rho \frac{DU_i}{Dt} = \rho g_i - \frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial X_j} + \frac{\partial \tau_{ij}^t}{\partial X_j} \quad (5.2)$$

unde $D(\cdot)/Dt$ este derivata substanțială definită în (3.5),

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \quad (5.3)$$

este partea medie a tensorului tensiunilor, iar tensorul

$$\tau_{ij}^t = -\rho \widetilde{u_i u_j} \quad (5.4)$$

este numit *tensiune Reynolds* și este o tensiune datorată *turbulenței*.

Tensorul $\widetilde{u_i u_j}$ este *tensiunea cinematică turbulentă*, dar din conciziune este numit uneori tot *tensiune Reynolds*, deși dimensional nu este corect căci nu are dimensiunea unei tensiuni.

Într-o curgere turbulentă efectele tensorului $\bar{\tau}_{ij}$ datorat vâscozității sunt mult mai mici decât ale tensorului Reynolds care sunt datorate turbulenței. În termenul ce corespunde forței volumice (forța gravitațională aici) din (5.2) densitatea medie este notată $\bar{\rho}$ care poate diferi de ρ în cazul unei densități neuniforme.

Problema 6 *Deduceți ecuația (5.2).*

Tensorul Reynolds poate fi interpretat ca viteza de transfer mediu a impulsului prin fluctuații turbulente. Tensorul Reynolds are nouă componente carteziane și este un tensor simetric.

Dacă notăm cu (u, v, w) componentele vectorului viteză după cele trei axe de coordonate, tensorul Reynolds se va scrie explicit sub forma

$$\left\| \begin{array}{ccc} -\overline{\rho u^2} & -\overline{\rho uv} & -\overline{\rho uw} \\ -\overline{\rho uv} & -\overline{\rho v^2} & -\overline{\rho vw} \\ -\overline{\rho uw} & -\overline{\rho vw} & -\overline{\rho w^2} \end{array} \right\|$$

Componentele diagonale sunt *tensiunile normale*, iar componentele nediagonale sunt *tensiunile de forfecare*. Dacă fluctuațiile turbulente sunt complet

izotrope, adică ele nu au nicio direcție preferențială, atunci componentele nediaagonale se anulează și $\overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2}$.

Tensorul $\overline{\tau}_{ij}$ este modelat aici din modelul de fluid vâscos neturbulent, în timp ce τ_{ij}^t trebuie să fie modelat din modelul de turbulență. Să notăm că mărimea τ_{ij}^t este o mărime medie datorată turbulenței (covarianței dintre mărimile stochastice \tilde{u}_i și \tilde{u}_j) și provine din medierea membrului stâng al ecuației (3.18), adică a termenului nelinier convectiv, și nu din medierea tensorului τ_{ij} .

Pentru tensiunea medie totală vom introduce notația

$$\mathcal{T}_{ij} \equiv -P\delta_{ij} + \overline{\tau}_{ij} + \tau_{ij}^t \quad (5.5)$$

Cu această notație ecuația (5.2) se scrie mai compact sub forma

$$\frac{DU_i}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{T}_{ij}}{\partial X_j} + \frac{\overline{\rho}}{\rho} g_i \quad (5.6)$$

Dacă în loc de ecuația (3.18) considerăm ecuația (3.19), adică ținem cont și de variația densității cu temperatura, vom face substituția (3.20) și obținem

$$\rho \frac{DU_i}{Dt} = \rho g_j [1 - \beta (\overline{T} - T_0)] \delta_{ij} - \frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{\partial \overline{\tau}_{ij}}{\partial X_j} + \frac{\partial \tau_{ij}^t}{\partial X_j} \quad (5.7)$$

sau, dacă plecăm de la (5.6),

$$\rho \frac{DU_i}{Dt} = \frac{\partial \mathcal{T}_{ij}}{\partial X_j} + \rho g_j [1 - \beta (\overline{T} - T_0)] \delta_{ij}$$

5.1.1 Ecuația energiei cinetice de curgere medie

Ecuația de mișcare pentru curgerea medie este, vezi ecuația (5.6),

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial X_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{T}_{ij}}{\partial X_j} + \frac{\overline{\rho}}{\rho} g_j \delta_{ij} \quad (5.8)$$

Înmulțind această ecuație cu U_i și însumând după i , rezultă

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} U_i^2 \right) + U_j \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{1}{2} U_i^2 \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial X_j} (U_i \mathcal{T}_{ij}) - \frac{1}{\rho} \mathcal{T}_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + U_i \frac{\overline{\rho}}{\rho} g_j \delta_{ij}$$

Introducând (5.5), (5.4) și (5.3) obținem

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} U_i^2 \right) + U_j \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{1}{2} U_i^2 \right) &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial X_j} \left(-\frac{P U_j}{\rho} + \frac{1}{\rho} U_i \bar{\tau}_{ij} - U_i \widetilde{u_i u_j} \right)}_{\text{transport}} \\
 &\quad - \underbrace{\nu \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial X_j}}_{\text{disipare vâscoasă}} \quad (5.9) \\
 &\quad + \underbrace{\widetilde{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial X_j}}_{\text{pierdere prin turbulență}} + \underbrace{\frac{\bar{\rho}}{\rho} g_j U_j}_{\text{pierdere prin energie potențială}}
 \end{aligned}$$

5.2 Ecuația mediată a energiei

Prin medierea ecuației de energie (3.34)

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial X_i^2} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad (5.10)$$

se obține ecuația mediată a energiei

$$\rho C_p \frac{\overline{DT}}{Dt} = \kappa \overline{\frac{\partial^2 T}{\partial X_i^2}} + \overline{\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial X_j}}$$

Să analizăm membrul stâng al ecuației (5.10) introducând descompunerea Reynolds a mărimilor stocastice:

$$\begin{aligned}
 \frac{DT}{Dt} &= \frac{\partial (\bar{T} + \tilde{T})}{\partial t} + (U_j + \tilde{u}_j) \frac{\partial (\bar{T} + \tilde{T})}{\partial X_j} \\
 &= \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial X_j} \right) + \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \tilde{T}}{\partial X_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial X_j} \right) + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{T}}{\partial X_j}
 \end{aligned}$$

Prin mediere Reynolds, termenii ce conțin câte o singură mărime fluctuantă se vor anula, rezultând

$$\frac{\overline{DT}}{Dt} = \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial X_j} \right) + \overline{\tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{T}}{\partial X_j}} \quad (5.11)$$