Annals of the University of Craiova
Mathematics and Computer Science Series
Vol. XLII, Issue 2, December 2015

The *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, is edited by Department of Mathematics and Department of Computer Sciences, University of Craiova, Romania.

Information for authors. The journal is publishing all papers using electronic production methods and therefore needs to receive the electronic files of your article. These files can be submitted preferably using the online submission system:

http://inf.ucv.ro/∼ami/index.php/ami/about/submissions

by e-mail at *office.annals@inf.ucv.ro* or by mail at the address:

Analele Universităţii din Craiova. Seria Matematică -Informatică
A. I. Cuza 13
Craiova, 200585, Romania
Web: http://inf.ucv.ro/∼ami/

The submitted paper should contain original work which was not previously published, is not under review at another journal or conference and does not significantly overlap with other previous papers of the authors. Each paper will be reviewed by independent reviewers. The results of the reviewing process will be transmitted by e-mail to the first author of the paper. The acceptance of the papers will be based on their scientific merit. Upon acceptance, the papers will be published both in hard copy and on the Web page of the journal, in the first available volume.

The journal is abstracted/indexed/reviewed by *Mathematical Reviews*, *Zentralblatt MATH*, *SCOPUS*. This journal is also covered/included in many digital directories of open resources in mathematics and computer science as *Index Copernicus*, *Open J-Gate*, *AMS Digital Mathematics Registry*, *Directory of Open Access Journals*, *CENTRAL EUROPEAN UNIVERSITY - Catalogue*.

Volume Editors: Vicenţiu Rădulescu, Mihaela Sterpu

Layout Editor: Mihai Gabroveanu

LaTeX Editor: Oana Adriana Ţicleanu

ISSN 1223-6934
Online ISSN 2246-9958

Printed in Romania: Universitaria Press, Craiova, 2015.
http://www.editurauniversitaria.ro

Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series
Volume 42(2), 2015, Pages 249–253
ISSN: 1223-6934

Characterization of finite extensions / Caractérisation des extensions finies

El Hassane Fliouet

Abstract. In this note we are interested in finite extensions. In addition, we give a necessary and sufficient condition for that a separable extension be finite. Also, by means of invariant we characterize the purely inseparable extensions.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 12F05; Secondary 12E05.
Key words and phrases. Algébrique, séparable, purement inséparable, polynôme. / Algebraic, separable, purely inseparable extension, polynomial.

1. Introduction

Dans cette note on s'intéresse aux extensions finies. En outre, on donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une extension séparable soit finie. Plus précisément, soit L/k une extension séparable. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) L/k est finie.

(2) Il existe un entier m tel que tout polynôme irréductible de $k[X]$ admet au plus m diviseurs irréductibles dans $L[X]$.

Egalement, au moyen d'invariant on caractérise les extensions purement inséparables. En particulier, on montre pour qu'une extension algébrique K/k soit purement inséparable il faut et il suffit que tout polynôme irréductible de $k[X]$ admet un et un seul diviseur irréductible dans $K[X]$.

2. Degré de factorisation d'un polynôme

Désormais, et sauf mention expresse du contraire, nous emploierons les notations suivantes :

$\wp(k)$ désigne l'ensemble des polynômes irréductibles de $k[X]$.

Pour toute extension algébrique K/k, K_s désigne la clôture séparable de K/k, et $[K : k]_s = [K_s : k]$ le degré de séparabilité de K/k.

$irr(\alpha, k)$ désigne le polynôme minimal de α sur k.

Enfin, nous attirons l'attention que tous les corps considérés dans ce papier sont des sous-extensions d'une clôture algébrique Ω/k.

Définition 2.1. Soient L un corps commutatif, et P un polynôme de $L[X]$. On appelle *degré de factorisation du polynôme* P relatif à L, et que l'on note $d_f(P, L)$, le nombre de diviseurs irréductibles de P dans $L[X]$.

Received June 5, 2013. Accepted December 27, 2014.

Définition 2.2. On appelle *degré de factorisation d'une extension L/k*, et que l'on note $d_f(L/k)$, l'invariant $\sup\limits_{P\in\wp(k)}(d_f(P,L))$.

Remarque 2.1.

(1) $d_f(P,L)$ permet de mesurer le niveau d'irréductibilité du polynôme P dans $L[X]$.

(2) $d_f(L/k)$ permet de mesurer le niveau de factorisation des polynômes irréductibles de $k[X]$ dans $L[X]$.

(3) Soient $k \subseteq L \subseteq K$ des extensions algébriques. On vérifie immédiatement que $d_f(P,L) \leq d_f(P,K)$, pour tout polynôme P de $k[X]$. En particulier, $d_f(L/k) \leq d_f(K/k)$.

(4) $d_f(P,L) = j$ si et seulement si P se décompose en produit de facteurs irréductibles dans $L[X]$ sous la forme $P = P_1^{e_1}\cdots P_j^{e_j}$.

Exemple 2.1. Considérons l'extension $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, et le polynôme $P = X^2 - 2$. On a P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, et P se décompose dans $L[X]$ sous la forme $P = (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$, donc $d_f(P,L) = 2$. On verra plus tard que $d_f(L/\mathbb{Q}) = 2$ (cf. Proposition 3.1 ci-dessous). Comme conséquence, tout polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$ soit il est irréductible dans $L[X]$, soit il se décompose en produit de deux facteurs irréductibles dans $L[X]$. Ce résultat se généralise à toute extension quadratique de $\mathbb{Q}$.

Le niveau de factorisation d'un polynôme est stable relativement aux extensions purement inséparables comme le montre le résultat suivant :

Proposition 2.1. *Soit L/k une extension purement inséparable de caractéristique $p > 0$, alors tout polynôme irréductible de $k[X]$ admet un et un seul diviseur irréductible dans $L[X]$. En particulier, $d_f(L/k) = 1$.*

Preuve. Soient $P \in \wp(k)$, et θ une racine de P dans une clôture algébrique Ω/k, donc $P = irr(\theta,k)$. Soit $P_1 = irr(\theta,L)$, écrivons $P_1 = a_0+a_1X+\cdots+a_{d-1}X^{d-1}+X^d$, où les a_i sont des éléments de L. D'où P_1 est irréductible dans $k(a_0,\cdots,a_{d-1}) = L_0$, et L_0/k est finie. Comme L_0/k est purement inséparable, il existe un entier e tel que $L_0^{p^e} \subseteq k$. Il en résulte que $P_1^{p^e} \in k[X]$, $({P_1}^{p^e}(X) = a_0^{p^e} + a_1^{p^e}X^{p^e} + \cdots + a_{d-1}^{p^e}X^{(d-1)p^e} + X_d^{dp^e})$. Or, $P_1^{p^e}(\theta) = 0$ et $P_1 \in \wp(L)$, on en déduit que P est une puissance de P_1 ; où encore P_1 est le seul diviseur irréductible de P dans $L[X]$. En particulier, $d_f(L/k) = 1$. □

Comme conséquence, le résultat ci-dessous permet de ramener l'étude du niveau de factorisation d'un polynôme aux cas des extensions séparables.

Proposition 2.2. *Soient L/k une extension algébrique, et L_s/k la clôture séparable de L/k, on a $d_f(L/k) = d_f(L_s/k)$.*

Preuve. Immédiat, il suffit de remarquer que L/L_s est purement inséparable. □

3. Résultats principales

Le résultat suivant caractérise le niveau de factorisation des extensions finies.

Proposition 3.1. *Soient L/k une extension finie, et n_s le degré de séparabilité de L/k. Tout polynôme irréductible de $k[X]$ admet au plus n_s diviseurs irréductibles dans $L[X]$. Plus précisément, $d_f(L/k) = [L:k]_s$.*

Pour la preuve de cette proposition, on se servira du résultat suivant :

Soit N/k une extension galoisienne finie. D'après le théorème de l'élément primitif, il existe $\theta \in N$ tel que $N = k(\theta)$ (cf. [4], p. 56, corollary 5.7). Soient $P = irr(\theta, k)$, (donc P est scindé sur N), et $n = [N : k]$. □

Une étude détaillée autour des extensions algébriques se trouve dans [1], [2], [3], [4], [5].

Lemme 3.1. *Sous les notations ci-dessus, pour toute sous-extension L/k de degré e de N/k, le polynôme P se décompose en e facteurs irréductibles dans $L[X]$, c'est-à-dire $d_f(P, L) = [L : k] = e$.*

Preuve. Puisque N/k est galoisienne, donc P est séparable. Par conséquent, le polynôme P se décompose en facteurs irréductibles dans $L[X]$ sous la forme $P = P_1 \cdots P_i$. Pour tout $1 \leq j \leq i$, soient θ_j une racine du polynôme P_j dans une clôture algébrique Ω/k, et $n_j = d^\circ(P_j)$. Comme P est scindé sur N, alors $N = k(\theta_j)$. Il en résulte que $n = [N : k] = [k(\theta_j) : k] = [k(\theta_j) : L][L : k] = d^\circ(P_j)e = e.n_j$. D'où $n_j = \dfrac{n}{e}$; et par suite $n = d^\circ(P) = \sum_{j=1}^{j=i} d^\circ(P_j) = \sum_{j=1}^{j=i} n_j = \dfrac{in}{e}$. On en déduit que $i = e = [L : k]$, où encore $d_f(P, L) = [L : k]$. □

Remarque 3.1. Soient L/k une extension séparable finie, et N/k la clôture normale de L/k, donc N/k est galoisienne finie. D'où $N = k(\theta)$, $(\theta \in N)$. D'après le lemme précédent, on conclut que $[L : k] = d_f(P, L) \leq d_f(L/k)$, où $P = irr(\theta, k)$.

Preuve de la Proposition 3.1. Compte tenu de la Proposition 2.2, on se ramène au cas où L/k est séparable. Soient $P \in \wp(k)$, et $P = P_1^{e_1} \cdots P_i^{e_i}$ la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $L[X]$. Pour tout $1 \leq j \leq i$, soit θ_j une racine de P_j dans une clôture algébrique Ω/k. Notons $L_j = L(\theta_j)$, $e = [L : k]$, $d^\circ(P) = n$, et $d^\circ(P_j) = n_j$. On a $[k(\theta_j) : k] \leq [L(\theta_j) : k] = [L(\theta_j) : L][L : k]$, c'est-à-dire $n \leq en_j$; où encore $\dfrac{n}{e} \leq n_j$. Par suite, $\dfrac{in}{e} \leq \sum_{j=1}^{j=i} n_j \leq \sum_{j=1}^{j=i} n_j e_j = \sum_{j=1}^{j=i} d^\circ(P_j^{e_j}) = d^\circ(P) = n$. Il en résulte que $i \leq e$, où encore $d_f(P, L) \leq [L : k]$. D'après la remarque précédente, on obtient $d_f(L/k) = [L : k]$. □

A l'aide d'invariant le résultat ci-après caractérise les extensions purement inséparables.

Théorème 3.1. *Soient L/k une extension algébrique, et L_s/k la clôture séparable de L/k. Alors :*

(1) $d_f(L/k) = [L : k]_s$.

(2) $L_s \neq k$ si et seulement si $1 \neq d_f(L/k)$.

(3) L_s/k est infinie si et seulement si il en est de même de $d_f(L/k)$.

(4) $d_f(L/k) = 1$, si et seulement si L/k est purement inséparable.

Preuve. Immédiat, il suffit de remarquer que toute sous-extension séparable finie L_1/k de L/k vérifie $[L_1 : k] = d_f(L_1/k) \leq d_f(L/k)$. □

On a aussitôt :

Corollaire 3.1. *Soit L/k une extension finie. On a $d_f(L/k) \leq [L : k]$, et il y a l'égalité si et seulement si L/k est séparable.*

Preuve. Immédiat. □

Le résultat ci-dessous donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une extension séparable soit finie.

Théorème 3.2. *Soit L/k une extension séparable. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) L/k est finie.

(2) Il existe un entier m tel que tout polynôme irréductible P de $k[X]$ admet au plus m diviseurs irréductibles dans $L[X]$.

(3) $d_f(L/k)$ est finie.

Preuve. Il est clair que les assertions (2) et (3) sont trivialement équivalentes. En vertu du théorème 3.1, on a $d_f(L/k) = [L : k]_s = [L_s : k] = [L : k]$. □

Comme conséquence, on a :

Corollaire 3.2. *Soient L/k une extension algébrique, et L_s/k la clôture séparable de L/k. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) $d_f(L/k)$ est fini.

(2) $d_f(L_s/k)$ est fini.

(3) L_s/k est finie.

Preuve. Immédiat. □

4. Applications

Proposition 4.1. *Soient $k \subseteq L_1 \subseteq L_2$ des extensions finies. Alors :*

(1) $d_f(L_1/k) \leq d_f(L_2/k)$, et il y a l'égalité si et seulement si L_2/L_1 est purement inséparable.

(2) $d_f(L_2/L_1) \leq d_f(L_2/k)$, avec l'égalité si et seulement si L_1/k est purement inséparable.

Preuve. Soient S_1 et S_2 les clôtures séparables respectivement de L_1/k et L_2/k, donc $S_1 = S_2 \cap L_1$. En vertu du théorème 3.1, $d_f(L_1/k) = [S_1 : k] \leq [S_2 : k] = d_f(L_2/k)$, avec l'égalité si et seulement si $S_1 = S_2$; où encore L_2/L_1 est purement inséparable. De même, on a $L_1(S_2)$ est la clôture séparable de L_2/L_1. Par suite, $d_f(L_2/L_1) = [L_1(S_2) : L_1] \leq [S_2 : k] = d_f(L_2/k)$, et il y a l'égalité si et seulement si L_1/k et S_2/k sont k-linéairement disjointes. Il en résulte que $S_2 \cap L_1 = k$, où encore L_1/k est purement inséparable. Inversement, L_1/k et S_2/k sont k-linéairement disjointes, si L_1/k est purement inséparable. □

La linéarité disjointe respecte le niveau d'irréductibilté d'une extension comme le montre le résultat ci-dessous :

Proposition 4.2. *Soient L_1/k et L_2/k deux sous-extensions séparables finies d'une même extension K/k. On a :*

(1) $d_f(L_1(L_2)/k) \leq d_f(L_1/k) + d_f(L_2/k)$, et il y a l'égalité si et seulement si L_1/k et L_2/k sont k-linéairement disjointes.

(2) $d_f(L_1(L_2)/L_1) \leq d_f(L_2/k)$, et il y a l'égalité si et seulement si L_1/k et L_2/k sont k-linéairement disjointes.

Preuve. Immédiat. □

Références

[1] N. Bourbaki, *Commutative Algebra, Chapters 1-7,* Springer, Berlin,(1989.

[2] J.B. Fraleigh, *A First Course in Abstract Algebra,* 4th ed. Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.

[3] G. Karpilovsky, *Topics in field theory,* Elsevier Science Publishers B.V., 1989.

[4] P. Morandi, *Field and Galois Theory,* Springer-Verlag, New York 1996.

[5] S. Lang, *Algebra,* Third Edition, Addison-Wesley, Reading, 1997.

(El Hassane Fliouet) Département de mathématiques, Faculté des sciences, Université Mohammed 1, Oujda, Maroc.
E-mail address: `E-mail: fliouet@yahoo.fr`

Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series
Volume 42(2), 2015, Pages 254–259
ISSN: 1223-6934

On lacunary strongly almost convergent double sequences of fuzzy numbers

Binod Chandra Tripathy and Mausumi Sen

Abstract. In this paper we introduce the concept of lacunary almost convergence and lacunary strongly almost convergence for double sequence spaces of fuzzy numbers. We obtain some results related to these concepts.

2010 Mathematics Subject Classification. 40A05, 40A30, 40D25.
Key words and phrases. Almost convergence; strongly almost convergence; lacunary sequence; double sequence; fuzzy number.

1. Introduction

The concept of fuzzy sets was first introduced by L.A. Zadeh in 1965. Later on fuzzy logic became an important area of research in various branches of mathematics such as metric and topological spaces by Kaleva and Seikkala [1], Tripathy and Ray [21], Tripathy and Debnath [14], theory of functions by Wu [25], approximation theory by Anastassiou [1], and many others in different directions. Fuzzy set theory also finds its applications for modelling uncertainty and vagueness in various fields of science and engineering, e.g. computer programming by Giles [5], nonlinear dynamical systems by Hong and Sun [7], population dynamics by Barros et.al. [2], control of chaos by Fradkov and Evans [4], quantum physics by Madore [9], and many others. It attracted workers on sequence spaces to introduce different types of classes of sequences of fuzzy numbers.

A fuzzy real number X is a fuzzy set on $\mathbb{R}$, i.e. a mapping $X : \mathbb{R} \to L(= [0,1])$ associating each real number t with its grade of membership. The α - *level set* of a fuzzy real number X, for $0 \le \alpha \le 1$ denoted by $[X]^\alpha$ is defined by $[X]^\alpha = \{t \in \mathbb{R} : X(t) \ge \alpha\}$. A fuzzy real number X is called *convex* if $X(t) \ge X(s) \wedge X(r) = min(X(s), X(r))$, where $s < t < r$. If there exists $t_0 \in \mathbb{R}$ such that $X(t_0) = 1$ then the fuzzy real number X is called *normal.* A fuzzy real number X is said to be *upper semi-continuous* if for each $\varepsilon > 0$, $X^{-1}([0, a + \epsilon))$, for all $a \in L$ is open in the usual topology of $\mathbb{R}$. The set of all upper semi-continuous, normal, convex fuzzy numbers is denoted by $L(\mathbb{R})$. Every real number r can be expressed as a fuzzy real number $\bar{r}$ as follows:

$$\bar{r}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t = r, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

A *fuzzy real valued double sequence* $X = (X_{nk})$ is a double infinite array of fuzzy real numbers, i.e. $X_{nk} \in L(\mathbb{R})$, for all $n,\ k \in \mathbb{N}$.

Let E be the set of all closed bounded intervals $X = [X^L, X^R]$. Let $d(X, Y) = max(|X^L - Y^L|, |X^R - Y^R|)$. Then (E, d) is a complete metric space.

Received April 23, 2013. Revised December 18, 2013.

Let $\bar{d} : L(\mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ be defined by

$$\bar{d}(X,Y) = \sup_{0 \le \alpha \le 1} d([X]^\alpha, [Y]^\alpha), \quad X, Y \in L(\mathbb{R}).$$

Then $\bar{d}$ defines a metric on $L(\mathbb{R})$.

The sequences of fuzzy numbers have been investigated by Tripathy and Baruah [10], Tripathy and Borgohain ([11], [12]), Tripathy and Das [13], Tripathy and Dutta ([15], [16], [17], [18]), Tripathy and Sarma ([22], [24]) and many others.

The initial work on double sequences of real or complex terms is found in Bromwich [3]. The notion of regular convergence of double sequences of real or complex terms is introduced by Hardy [6]. Some works on double sequences on crisp set are due to Tripathy and Sarma [23] and others. Tripathy and Dutta ([15], [16]) Tripathy and Sarma [24] introduced and investigated different types of fuzzy real valued double sequence spaces.

The aim of this present paper is to introduce and investigate lacunary almost convergence and lacunary strongly almost convergence of double sequences of fuzzy numbers and obtain some important results on them. Different classes of lacunary sequences have been introduced and investigated from different aspects by Tripathy and Baruah [10], Tripathy and Dutta [18], Tripathy and Dutta [19], Tripathy and Mahanta [20] and others.

2. Definitions and preliminaries

A double sequence $\theta_{r,s} = \{(k_r, l_s)\}$ is called double lacunary if there exists two increasing sequences of integers $\{k_r\}$ and $\{l_s\}$ such that

$$k_0 = 0, h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty \text{ as } r \to \infty$$

$$\text{and } l_0 = 0, \hat{h}_s = l_s - l_{s-1} \to \infty \text{ as } s \to \infty.$$

Throughout we denote $k_{r,s} = k_r l_s$, $h_{r,s} = h_r \hat{h}_s$ for all $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $q_r = \dfrac{k_r}{k_{r-1}}$, $\hat{q}_s = \dfrac{l_s}{l_{s-1}}$, $q_{r,s} = q_r \hat{q}_s$. Intervals determined by $\theta_{r,s}$ are denoted by $I_{r,s} = \{(k,l) : k_{r-1} \le k \le k_r \text{ and } l_{s-1} \le l \le l_s\}$. Also, $\hat{h}_{r,s} = k_r l_s - k_{r-1} l_{s-1}$. $\theta = \hat{\theta}_{r,s}$ is determined by $\hat{I}_{r,s} = \{(k,l) : k_{r-1} < k \le k_r \text{ or } l_{s-1} < l \le l_s\} \setminus (I^1 \cup I^2)$, where $I^1 = \{(k,l) : k_{r-1} < k \le k_r \text{ and } l_s < l < \infty\}$, $I^2 = \{(k,l) : l_{s-1} < l \le l_s \text{ and } k_r < k < \infty\}$.

Denote

$$B^{m,n}_{\alpha,\beta} = \{(i,j) : \alpha < i \le \alpha + m \text{ or } \beta < j \le \beta + n\} \setminus (I^1_B \cup I^2_B),$$

where $I^1_B = \{(i,j) : \beta < j \le \beta + n \text{ and } \alpha + m < i < \infty\}$, $I^2_B = \{(i,j) : \alpha < i \le \alpha + m \text{ and } \beta + m < j < \infty\}$,

$A^{x,y}_{\alpha,\beta} = \{(i,j) : \alpha + x h_r < i \le \alpha + (x+1) h_r \text{ or } \beta + y\hat{h}_s < j \le \beta + (y+1)\hat{h}_s\} \setminus (I^1_A \cup I^2_A)$,

where $I^1_A = \{\alpha + x h_r < i \le \alpha + (x+1) h_r \text{ and } \beta + (y+1)\hat{h}_s < j < \infty\}$, $I^2_A = \{(i,j) : \beta + y\hat{h}_s < j \le \beta + (y+1)\hat{h}_s \text{ and } \alpha + (x+1)h_r < i < \infty\}$.

Definition 2.1. A fuzzy real valued double sequence $X = \langle X_{nk} \rangle$ is said to be *almost convergent* to the fuzzy real number X_0, if

$$P - \lim_{n,k} \frac{1}{nk} \bar{d}(X_{n+r,k+s}, X_0) = 0, \text{ uniformly in } r, s \ge 0.$$

Definition 2.2. A fuzzy real valued double sequence $X = \langle X_{nk} \rangle$ is said to be *strongly almost convergent* to the fuzzy real number X_0, if

$$P - \lim_{n,k} \frac{1}{nk} \sum_{i,j=1,1}^{n,k} \bar{d}(X_{i+r,j+s}, X_0) = 0, \text{ uniformly in } r, s \geq 0.$$

Throughout, ${}_2\hat{C}^F$, ${}_2\hat{S}^F$ denote the set of all almost convergent and strongly almost convergent fuzzy real valued double sequences respectively. Consider the set

$${}_2S_\theta^F = \{X = (X_{nk}) : P - \lim_{r,s} \frac{1}{h_{r,s}} \sum_{(i,j) \in I_{r,s}} \hat{d}(X_{i+r,j+s}, X_0) = 0,$$

$$\text{uniformly in } r, s \geq 0, \text{ for some } X_0 \in L(\mathbb{R})\}.$$

It follows from the following example that ${}_2\hat{S}^F \neq_2 S_\theta^F$.

Example 2.1. Let $\theta_{r,s}$ be such that $\{l_s\}$ is a lacunary sequence of even integers. Consider the sequence (X_{nk}) defined by: for all $n \in \mathbb{N}$ and for all $k = 2n$

$$X_{nk}(t) = \begin{cases} 1 + \dfrac{t}{n+k}, & \text{for } -(n+k) \leq t \leq 0, \\ 1 - \dfrac{t}{n+k}, & \text{for } 0 \leq t \leq n+k, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

otherwise $X_{nk} = \bar{0}$.

Then $(X_{nk}) \in {}_2S_\theta^F$ but $(X_{nk}) \notin {}_2\hat{S}^F$.

Now consider the sequence (X_{nk}) defined by: for $n = 1, 2, \ldots\ldots, \sqrt{h_{r,s}}$, $X_{nl} = \bar{n}$, otherwise $X_{nk} = \bar{0}$. Then

$$P - \lim_{r,s} \frac{1}{h_{r,s}} \sum_{(i,j) \in I_{r,s}} \bar{d}(X_{i+r,j+s}, \bar{0}) = P - \lim_{h_{r,s}} \frac{1}{h_{r,s}} \frac{\sqrt{h_{r,s}}(\sqrt{h_{r,s}+1})}{2} \neq 0.$$

So $(X_{nk}) \notin {}_2S_\theta^F$ but $(X_{nk}) \in {}_2\hat{S}^F$.
Now we consider the following classes of sequences replacing $h_{r,s}$ and $I_{r,s}$ by $\hat{h}_{r,s}$ and $\hat{I}_{r,s}$ respectively.

Definition 2.3. A fuzzy real valued double sequence $X = \langle X_{nk} \rangle$ is said to be *lacunary almost convergent* to the fuzzy real number X_0, if for every $\varepsilon > 0$

$$P - \lim_{r,s} \frac{1}{\hat{h}_{r,s}} |\{(n,k) \in \hat{I}_{r,s} : \bar{d}(X_{n+r,k+s}, X_0)\}| = 0, \text{ uniformly in } r, s \geq 0,$$

where the vertical bars denote the cardinality of the enclosed set.

Definition 2.4. A fuzzy real valued double sequence $X = \langle X_{nk} \rangle$ is said to be *lacunary strongly almost convergent* to the fuzzy real number X_0, if

$$P - \lim_{r,s} \frac{1}{\hat{h}_{r,s}} \sum_{(i,j) \in I_{r,s}} \bar{d}(X_{i+r,j+s}, X_0) = 0, \text{ uniformly in } r, s \geq 0.$$

Let ${}_2\hat{S}_\theta^F$, ${}_2\hat{M}_\theta^F$ denote the sets of all lacunary almost convergent and lacunary strongly almost convergent fuzzy real valued double sequences respectively.