# Annals of the University of Craiova
# Mathematics and Computer Science Series
### Vol. XLIV Issue 2, December 2017

**Information for authors.** The journal is publishing all papers using electronic production methods and therefore needs to receive the electronic files of your article. These files can be submitted preferably by online submission system:

*http://inf.ucv.ro/∼ami/index.php/ami/about/submissions*

by e-mail at *office.annals@inf.ucv.ro* or by mail on the address:

*Analele Universităţii din Craiova, Seria Matematică-Informatică*

*A. I. Cuza 13*

*Craiova, 200585, Romania*

Web: http://inf.ucv.ro/∼ami/

The submitted paper should contain original work which was not previously published, is not under review at another journal or conference and does not significantly overlap with other previous papers of the authors. Each paper will be reviewed by independent reviewers. The results of the reviewing process will be transmitted by e-mail to the first author of the paper. The acceptance of the papers will be based on their scientific merit. Upon acceptance, the papers will be published both in hard copy and on the Web page of the journal, in the first available volume.

The journal is abstracted/indexed/reviewed by *Mathematical Reviews*, *Zentralblatt MATH*, *SCOPUS*. This journal is also included in many digital directories of open resources in mathematics and computer science as *Index Copernicus*, *Open J-Gate*, *AMS Digital Mathematics Registry*, *Directory of Open Access Journals*, *CENTRAL EUROPEAN UNIVERSITY - Catalogue*, etc.

**Volume Editors:** Vicenţiu Rădulescu, Mihaela Sterpu

**Layout Editors:** Mihai Gabroveanu

**ISSN 1223-6934**

**Online ISSN 2246-9958**

**Printed in Romania:** Editura Universitaria, Craiova, 2017.

http://www.editurauniversitaria.ro

Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series
Volume 44(2), 2017, Pages 169–172
ISSN: 1223-6934

# Laudatio for Professor Gheorghe Moroşanu at the Doctor Honor Causa of the University of Craiova Award Ceremony

Cristian Vladimirescu

Stimate Domnule Rector,
Stimaţi Domni Prorectori,
Stimate Domnule Preşedinte,
Stimaţi Membri ai Senatului Universităţii,
Distinşi Membri ai Comunităţii Academice,
Distinşi Colegi,
Distinşi Studenţi,
Doamnelor şi Domnilor,

Acum, când Universitatea din Craiova sărbătoreşte 70 de ani de la înfiinţare, în spiritul tradiţiei universitare, de promovare a personalităţilor care dăruiesc valoare si cunoaştere prin activitatea lor excepţională, avem deosebita onoare de a oferi reflexia cea mai înaltă a aprecierii noastre, titlul de Doctor Honoris Causa, domnului Gheorghe Moroşanu, profesor la Central European University din Budapesta. Cu acest prilej vă rog sa-mi permiteţi să prezint Laudatio în onoarea unui mare matematician, profesor extraordinar şi, nu în ultimul rând, prieten constant al Universităţii din Craiova.

Vom selecta în cele ce urmează doar câteva momente semnificative din cariera academică de excepţie a domniei sale, construită în mulţi ani de activitate intensă şi dedicată matematicii şi formării tinerilor cercetători în spiritul valorilor umane.

Profesorul Gheorghe Moroşanu s-a născut în data de 30 aprilie 1950, în localitatea Darabani din judeţul Botoşani. Urmează clasele I-VIII în perioada 1957-1965 la Şcoala Generală Nr. 3 din Darabani şi continuă studiile la Liceul Teoretic din Darabani, în perioada 1965-1969, fiind interesat de toate domeniile, însă cu înclinaţii deosebite pentru matematică. Între anii 1969 si 1973 urmează cursurile Facultăţii de Matematică a Universităţii *Alexandru Ioan Cuza* din Iaşi, continuând la aceeaşi facultate cu un an de specializare.

După o perioadă de stagiatură (obligatorie la acea vreme) la un liceu din Iaşi, ocupă în 1978 un post de cercetător ştiinţific la Institutul de Matematică din cadrul Universitaţii *Alexandru Ioan Cuza*. Între 1980 şi 1991 a parcurs toate treptele academice, până la poziţia de profesor universitar, poziţie pe care a continuat până în 2000. Urmează o perioadă în care a fost cercetător la Universitatea din Stuttgart şi, din 2002 până în prezent, este profesor la Central European University din Budapesta. Din 2015 devine şi profesor asociat invitat la Universitatea *Babeş-Bolyai* din Cluj-Napoca.

This allocution has been presented at the ceremony of awarding the DOCTOR HONORIS CAUSA title of the University of Craiova to Professor GHEORGHE MOROŞANU, from Central European University, Budapest & Babeş Bolyai University, Cluj-Napoca, on October 20, 2017, at University of Craiova.

În anul 1977 s-a înscris la doctorat, la profesorul Adolf Haimovici, colaborând intens cu profesorul Viorel P. Barbu (în prezent membru al Academiei Române), cu care începuse deja în prealabil activitatea de cercetare ştiinţifică. A susţinut în ianuarie 1981 teza de doctorat cu titlul *Probleme calitative pentru ecuaţii diferenţiale neliniare de tip acretiv în spaţii Banach*, fiind primul care a obţinut titlul de doctor în matematici dintre cei peste 150 de absolvenţi din generaţia sa, ai Facultăţii de Matematică a Universităţii *Alexandru Ioan Cuza*. Teza sa de doctorat este bazată pe rezultate ale sale publicate în reviste internaţionale prestigioase (*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Journal of Differential Equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Nonlinear Analysis, Numerical Functional Analysis and Optimization*), ceea ce era neobişnuit pe vremea aceea.

În 1983 a primit premiul *Gheorghe Lazăr* al Academiei Române pentru contribuţii deosebite la teoria ecuaţiilor hiperbolice cu derivate parţiale.

În anul 2008, profesorului Gheorghe Moroşanu i-a fost decernat titlul de *egyetemi tanár* (cel mai înalt titlu academic în învăţămîntul superior din Ungaria) de către preşedintele Ungariei.

În anul 2016 i-a fost decernat titlul de Doctor Honoris Causa al Universităţii *Ovidius* din Constanţa.

Şcoala din Darabani, pe care Gheorghe Moroşanu a frecventat-o între anii 1957-1965, îi poartă numele, începând cu anul 2007, când i s-a conferit şi titlul de *cetăţean de onoare* al oraşului Darabani, ca o apreciere a realizărilor sale.

Este autorul a peste 135 de articole de cercetare publicate în reviste prestigioase, între care amintim: *Numerical Functional Analysis and Optimization, Journal of Differential Equations, Mathematische Nachrichten, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Nonlinearity, Nonlinear Analysis, Theory Methods and Applications, Nonlinear Analysis: Real World Applications, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Journal of Global Optimization, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Journal of Optimization Theory and Applications, Advanced Nonlinear Studies, Set-Valued and Variational Analysis, Glasgow Mathematical Journal, Communications in Contemporary Mathematics.* Este autor şi coautor a 15 cărţi (5 în limba engleză şi 10 în limba română), publicate în edituri de înalt prestigiu, cum ar fi: Chapman & Hall/CRC, Birkhäuser, D. Reidel, Editura Academiei Române.

Cariera matematică de succes a profesorului Gheorghe Moroşanu este fundamentată pe cercetări ştiinţifice valoroase în domeniile: Ecuaţii diferenţiale, Calcul variaţional, Ecuaţii de evoluţie în spaţii Banach, Control optimal, Teoria perturbaţiilor singulare, Mecanica fluidelor. Dintre subiectele abordate menţionăm: Ecuaţii de evoluţie în spaţii Hilbert, probleme cu valori iniţiale şi pe frontieră pentru ecuaţii sau sisteme cu derivate parţiale de tip parabolic sau hiperbolic, teoria perturbaţiilor singulare pentru ecuaţii cu derivate parţiale neliniare şi ecuaţii de evoluţie semiliniare în spaţii Hilbert, probleme la limită pentru ecuaţii cu derivate parţiale de tip eliptic, inclusiv ecuaţii cu operatori p-Laplace, probleme de autovalori, ecuaţii diferenţiale ordinare neliniare, ecuaţii integro-diferenţiale, ecuaţii diferenţiale cu întârziere, ecuaţii diferenţiale ordinare cu operatori p-Laplace, operatori monotoni, operatori diferenţiali neliniari, ecuaţii cu diferenţe în spaţii Hilbert, inclusiv algoritmul punctului proxim sau variante, metoda Fourier pentru rezolvarea unor ecuaţii de evoluţie abstracte, optimizare, input identifiability şi control optimal, aplicaţii în acustică, biologie şi ecologie matematică, circuite integrate, hidraulică, oscilatori neliniari, procese de difuzie, sisteme chimice cu auto-organizare, sistemul telegrafului, teoria capilarităţii etc.

A colaborat cu peste 40 de cercetători (printre care amintim pe Luminiţa Barbu, Viorel Barbu, Nicuşor Costea, Tihomir Gyulov, Veli-Matti Hokkanen, Alexandru Kristály, Mihai Mihăilescu, Enzo Mitidieri, Pekka Neitaanmäki, Nicolae Pavel, Dan Petrovanu, Denisa Stancu-Dumitru, Stepan Tersian, Vicenţiu Rădulescu, Csaba Varga, Wolfgang L. Wendland), în diverse domenii, atât din aria de cercetare a domniei sale, cât şi din domenii conexe, care includ mecanica, fizica, biologia, ecologia, chimia, economia.

Recunoaşterea internaţională a profesorului Gheorghe Moroşanu este reliefată şi de vizitele, ca cercetător sau profesor invitat, la universităţi ori centre de cercetare de prestigiu, cum ar fi: Universitatea din Stuttgart, Universitatea Tehnică din München, Universitatea din Jyväskylä, Universitatea din Ruse, Centrul Internaţional de Fizică Teoretică din Trieste, Universitatea din Athens, Ohio, Universitatea *Babeş-Bolyai* din Cluj-Napoca, Universitatea din Iowa City.

A susţinut, ca invitat de onoare, numeroase lecţii şi conferinţe şi a organizat numeroase întruniri ştiinţifice, atât în ţară, cât şi în străinătate. În particular, a iniţiat în acest an Seminarul Itinerant Românesc de Analiză Matematică şi Aplicaţii (SIRAMA), cu un comitet ştiinţific format din matematicieni de prestigiu din toată ţara, inclusiv de la Universitatea din Craiova.

Mai menţionăm lansarea seminarului ştiinţific al Departamentului de Matematici de la Central European University din Budapesta, în cadrul caruia au ţinut prelegeri matematicieni de prim rang.

Ca o recunoaştere a calităţilor de lider, domnia sa a deţinut mai multe funcţii de management academic, printre care menţionam: Director al Departamentului de Ecuaţii Diferenţiale al Universităţii *Alexandru Ioan Cuza* din Iaşi şi Director al Departamentului de Matematici din cadrul Central European University din Budapesta.

A contribuit la acreditarea şi implementarea programelor de doctorat în matematică şi master în ştiinţe de la Central European University, pe care le-au urmat şi 10 tineri matematicieni români şi a supervizat, în calitate de conducător de doctorat, peste 15 cercetători.

Onorată Asistenţă,

Cum am specificat la început, profesorul Gheorghe Moroşanu este un prieten constant al Universităţii din Craiova. Domnia sa este, fără întrerupere, din anul 2005 până în prezent, membru al echipei editoriale a revistei *Analele Universităţii din Craiova, Seria Matematică-Informatică.* Din anul 2016 este membru al echipei editoriale a seriei *Monographs in Applied Mathematics* a Departamentului de Matematici Aplicate al Universităţii din Craiova.

A supervizat la Central European University doctoratele a doi absolvenţi ai Universităţii din Craiova, Nicuşor Costea şi Mihai Mihăilescu. A facilitat vizite de cercetare la Central European University pentru cadre didactice şi studenţi ai Universităţii din Craiova.

A organizat workshop-uri şi conferinţe la Central European University cu invitaţi de la Universitatea din Craiova.

Are un rol important în realizarea unui număr mare de cooperări ştiinţifice cu cadre didactice şi tineri cercetători de la Universitatea din Craiova.

Stimate Domnule Profesor Gheorghe Moroşanu,

Întreaga noastră comunitate academică este onorată de prezenţa dumneavoastră astăzi, la Craiova, iar titlul pe care Universitatea din Craiova urmează să vi-l confere este o apreciere a prestigiului academic al dumneavoastră. Vă dorim sănătate şi putere de muncă spre a continua, cu aceeaşi dedicaţie, activitatea dumneavoastră de elită în domeniul matematicii.

**Vivat, Crescat, Floreat !**

Conf. dr. Cristian Vladimirescu
Director al Departamentului de Matematici Aplicate

Craiova, 20 octombrie 2017

(Cristian Vladimirescu) Department of Applied Mathematics, University of Craiova, 13 A.I. Cuza, Craiova 200585, Romania

Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series
Volume 44(2), 2017, Pages 173–178
ISSN: 1223-6934

# Do we need Mathematics?

Gheorghe Moroşanu

## AVEM NEVOIE DE MATEMATICĂ?

Menţionez de la bun început că ceea ce voi spune se adresează publicului larg, evitând informaţii şi formulări excesiv de riguroase.

Matematica, în formele ei elementare, s-a născut probabil chiar înainte de apariţia scrierii şi a coexistat cu societatea umană încă de la începuturi. Era necesară la măsurarea suprafeţelor cultivate, la gestionarea bunurilor, în activităţile comerciale etc. Ne putem închipui că, atunci când au aparut mulţimi tot mai mari de bunuri materiale, au apărut imediat şi *sistemele de numeraţie*.

Se consideră că începuturile matematicii mai avansate sunt în Egiptul antic (după cum afirma Aristotel (384–322, î. Hr.), elev al lui Platon (428/427 sau 424/423–348/347, î. Hr.), profesor al lui Alexandru Macedon (356–323, î. Hr.)).

De la egipteni moştenim în particular *sistemul de numeraţie zecimal*, astăzi valabil în toată lumea (au existat şi alte sisteme de numeraţie; de exemplu, sumerienii foloseau sistemul de numeraţie cu baza 60).

Egiptenii au inventat (în mileniul IV, î. Hr.) cel mai bun calendar din antichitate, care a fost apoi folosit în timpul lui Iulius Cesar (Gaius Iulius Caesar, aprox. 100–44, î. Hr.) la crearea calendarului iulian.

Pentru construcţii (inclusiv a piramidelor) şi pentru măsurarea pamântului egiptenii foloseau lungimile de 3, 4 şi 5 unităţi pentru construirea unghiului drept (în limbajul actual, putem spune că era vorba despre folosirea reciprocei teoremei lui Pitagora (Samos, 570-495, î. Hr.)).

Desigur, se poate vorbi despre multe cunoştinţe de matematică elementară şi astronomie, acumulate de-a lungul antichităţii, nu numai in Egipt, ci şi în Mesopotamia, India, China, Grecia antică.

Oricum, la începuturile ei, matematica (se pare că primul care a folosit termenul *matematica* a fost Pitagora, însemnând *ceea ce se învaţă*) s-a dezvoltat ca o **necesitate a societăţii umane**. Folosirea matematicii, în forme mai mult sau mai puţin avansate, pentru rezolvarea unor probleme practice, a continuat mereu şi va continua şi în viitor. Este vorba despre ceea ce numim azi **matematici aplicate**.

Însă omul nu se mulţumeşte să-şi asigure doar existenţa. În perioade de linişte şi prosperitate, oamenii au simţit nevoia de spiritualitate, în particular de filosofie şi artă. Matematica, în forme din ce în ce mai avansate, a mers împreună cu filosofia, care în antichitate îngloba toate ştiinţele. De exemplu, Pitagora spunea ca *totul este*

Original title "Avem nevoie de matematică?". This dissertation has been given at the ceremony of awarding the DOCTOR HONORIS CAUSA title of the University of Craiova to Professor GHEORGHE MOROŞANU, from Central European University, Budapest & Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca, on October 20, 2017, at University of Craiova.

*număr* şi că universul este discret; a întemeiat o şcoală, încercând să explice ştiinţa, filosofia şi chiar religia prin intermediul numerelor. În particular, a descoperit teorema referitoare la triunghiuri dreptunghice care îi poartă numele. Se spune că, pentru a sărbători această descoperire, a jertfit un taur.

Cei care se ocupau cu matematica au început să întâlnească probleme dificile. De exemplu, au observat că diagonala unui pătrat şi latura sa sunt segmente incomensurabile; astfel, lungimea diagonalei unui pătrat cu latura unitate nu poate fi exprimată cu un numar raţional (o fracţie de numere întregi); astăzi ştim că e vorba de rădăcina pătrată a lui 2, sau radical din 2, notat $\sqrt{2}$, un număr care nu este raţional şi e numit *iraţional*. În mod similar, lungimea cercului cu diametrul unitate este un număr iraţional, cunoscut acuma ca fiind numărul $\pi$.

Faptul că numerele raţionale nu pot exprima întotdeauna mărimi din lumea reală a creat o mare problemă. Se simţea nevoia extinderii mulţimii numerelor raţionale (notată cu $\mathbb{Q}$) la o mulţime de numere mai amplă care să poată fi folosită în orice fel de problemă practică. Astăzi se cunoaşte că o asemenea mulţime este *mulţimea numerelor reale*, notată de regulă cu $\mathbb{R}$. În acelaşi timp, era şi o problemă teoretică, care se incadrează în ceea ce numim azi **matematică pură**. Construcţia riguroasă (axiomatică) a numerelor reale (ca un corp ordonat complet) a venit foarte târziu, abia în secolul al XIX-lea. $\mathbb{R}$ se defineşte ca o completare a lui $\mathbb{Q}$ (satisfacând aşa-numita axiomă a completitudinii), adăugându-se la $\mathbb{Q}$ o mulţime amplă, aceea a numerelor iraţionale. Există mai multe modele pentru $\mathbb{R}$, de exemplu, modelele create de Cantor–Méray, Dedekind, Stolz–Weierstrass (Georg Cantor, 1845-1918, german; Charles Méray, 1835-1911, francez; Richard Dedekind, 1831-1916, german; Otto Stolz, 1842-1905, austriac; Karl Weierstrass, 1815-1897, german), toate echivalente între ele. În particular, modelul lui Cantor-Méray se bazează pe şiruri Cauchy de numere raţionale (Augustin Louis Cauchy, 1789–1857, francez). Un şir de numere raţionale $(r_1, r_2, ..., r_n, ...)$ este Cauchy dacă $|r_n - r_m|$ devine oricât de mic dorim pentru $n$, $m$ suficient de mari. Pe scurt, *limitele* tuturor acestor şiruri compun mulţimea $\mathbb{R}$ (noţiunea de limită este amintită puţin mai jos).

Orice numar raţional $r$ se obţine ca limita şirului constant $(r, r, ...)$. Dacă se consideră, de exemplu, şirul definit prin

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{2}{x_n}\big), \quad n = 1, 2, \dots,$$

acesta este un şir Cauchy de numere raţionale, limita sa fiind soluţia pozitivă a ecuaţiei $x^2 = 2$, adică $\sqrt{2}$. De fapt, există mai multe şiruri Cauchy cu aceeaşi limită, astfel încât, în modelul lui Cantor–Méray, un element se identifică cu clasa tuturor şirurilor de numere raţionale *echivalente* în sens Cauchy. Amintim că $(r_1, r_2, ..., r_n, ...)$, $(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, ..., \tilde{r}_n, ...)$ sunt echivalente în sens Cauchy dacă $|r_n - \tilde{r}_n|$ devine oricât de mic dorim pentru orice $n$ suficient de mare. Această identificare a unui element (număr) cu un şir Cauchy, mai exact cu clasa sa de echivalenţă, este necesară deoarece nu se poate defini un număr prin el însuşi. Cred că s-a înţeles deja ideea de construire a lui $\mathbb{R}$ ca o completare a lui $\mathbb{Q}$. Nu intrăm în alte amănunte.

Pentru înţelegerea modelului avem nevoie de conceptul de *infinit*, care este esenţial în *analiza matematică*. În particular, limita unui şir Cauchy de numere raţionale $(r_1, r_2, ..., r_n, ...)$ este numărul (unic) de care se apropie $r_n$ pentru $n$ suficient de mare (adică, pentru $n$ tinzând la infinit). În prezent, conceptul de infinit este acceptat şi folosit în mod uzual. Însă, începând din antichitate până târziu, în secolul XIX, au existat dispute aprinse asupra acestui concept. Unul dintre paradoxurile lui Zenon (enunţat cam pe la anul 450, î. Hr.) spunea aşa: ca să ajungi dintr-un punct A în alt punct, B (distanţa dintre cele două puncte fiind cunoscută, să zicem $d$ unităţi de lungime), trebuie să parcurgi întâi jumătate din distanţă, adică $d/2$, apoi jumătate din distanţa rămasă, adică $d/4$, apoi $d/8$ ş. a. m. d. Conform acestui raţionament, în concepţia lui Zenon, nu vei putea ajunge niciodată în punctul B, pentru că mereu rămâne o distanţă care trebuie parcursă. Fiind un număr nelimitat de distanţe de parcurs se credea atunci ca *suma* timpilor necesari parcurgerii acestor distanţe se tot măreşte, deci punctul B nu poate fi niciodată atins. De fapt, în limbajul de astăzi, considerând că viteza de deplasare este egală cu unitatea (ceea ce nu retrânge generalitatea), avem de fapt o serie (geometrică) convergentă,

$$d/2 + d/4 + d/8 + \cdots = d\,,$$

deci punctul B se poate atinge în timp finit (adică, distanţa $d$ poate fi acoperită). Remarcăm că, în această explicaţie, se foloseşte esenţial conceptul de infinit, mai exact avem o sumă infinită (serie), sumele sale parţiale constituind un şir cu limita $d$.

Un paradox similar, formulat tot de Zenon, spune că Ahile nu poate ajunge niciodată o broască ţestoasă, deşi evident Ahile merge mai repede. Anume, să zicem că iniţial Ahile se află în punctul A, iar broasca în punctul B; Ahile parcurge distanţa AB, timp în care broasca parcurge o distanţa mai mică, BC; apoi, Ahile parcurge distanţa BC, timp în care broasca parcurge o distanţă mai mică, CD ş. a. m. d. Zenon concluzionează că Ahile nu ajunge broasca niciodată, deoarece pentru el ramâne mereu o distanţă de parcurs pentru a ajunge la broască. Se rezolvă şi acest paradox uşor folosind noţiunea de infinit (de fapt, noţiunea de serie). Aşadar, paradoxurile discutate nu sunt cu adevărat paradoxuri.

În general, prin **matematică pură** se înţelege acea parte a matematicii care nu are legătură directă cu experienţa practică a omului. Ca şi filosofia, are existenţa ei proprie şi se dezvoltă independent de societate, cel puţin în prima instanţă. Adevărurile matematice sunt acolo, aşteaptă să fie descoperite, rând pe rând.

În particular, este cunoscută istoria postulatului al V-lea al lui Euclid (Sec. IV-III, î. Hr., grec), al paralelelor, despre care s-a crezut multă vreme că este o teoremă care ar rezulta din celelate postulate/axiome ale lui Euclid. Abia în prima jumătate a secolului XIX, Janos Bolyai (n. la Cluj, 1802-1860, maghiar) şi Nikolai Lobacevski (1792-1856, rus) au arătat, în mod independent şi aproape în acelaşi timp, că este vorba de o axiomă. Prin negarea acestei axiome se obţin geometrii diferite de cea clasică (euclidiană), numite geometrii ne-euclidiene. Evident, crearea geometriilor ne-euclidiene ţine de matematica pură. La bază a stat efortul de a clarifica dacă postulatul paraleleor este teoremă sau axiomă. Totuşi, chiar Lobacevski spunea că *nu există nici un domeniu al matematicii, oricât de abstract, care să nu se aplice cândva la fenomene din lumea reală*. În particular, geometria hiperbolică (neeuclidiană) a fost folosită mai târziu (în 1916) de Einstein (Albert Einstein, 1879-1955) la formularea teoriei generalizate a relativităţii.

De fapt, se poate spune că unele părţi ale matematicii sunt mai aproape de aplicaţii decât altele şi că nu există o frontieră precisă între matematica pură şi cea aplicată.

Uneori aplicaţiile conduc la rezultate teoretice semnificative, alteori teorii matematice îşi găsesc ulterior aplicaţii importante.

În matematică se întâlneşte deseori noţiunea de *spaţiu liniar (vectorial)*. Un exemplu simplu este mulţimea vectorilor liberi din spaţiul fizic. Această mulţime, notată de exemplu cu $V_3$, formează un spaţiu liniar (în raport cu operaţiile uzuale: adunarea vectorilor şi înmulţirea cu scalari). Orice vector $\mathbf{v}$ poate fi caracterizat de un triplet ordonat $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, numerele $x$, $y$, $z$ fiind coordonatele lui $\mathbf{v}$ în raport cu un sistem cartezian dat (după numele lui René Descartes, latinizat Cartesius (1596–1650), matematician şi filosof francez). Se spune ca Descartes a inventat sistemul de coordonate (care îi poartă numele) când stătea în pat (fiind bolnav), încercând să găsească o modalitate de a caracteriza poziţia unei muşte care zbura prin cameră. Aşa s-a ajuns la crearea geometriei analitice. Astfel, spaţiul $V_3$ poate fi identificat cu $\mathbb{R}^3$. Orice vector (triplet ordonat) $\mathbf{v} \equiv (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se poate exprima ca o combinaţie liniară de vectorii $\mathbf{i}= (1, 0, 0)$, $\mathbf{j}= (0, 1, 0)$, $\mathbf{k}= (0, 0, 1)$: $\mathbf{v}= x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$. Se spune că $B = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ este o bază în $V_3 \equiv \mathbb{R}^3$ şi dimensiunea acestui spaţiu este 3. Astfel, dimensiunea definită în acest fel coincide cu imaginea intuitivă a tri-dimensionalităţii spaţiului fizic. Când vorbim însă de dimensiuni mai mari, deja apare o rezistenţă din partea publicului larg, deoarece în acest caz nu ne mai putem baza pe ceea ce se poate vizualiza prin desen. Totuşi nu este dificil de înţeles. Iată, să considerăm acum mulţimea polinoamelor cu coeficienţi numere reale, de grad cel mult 9, să zicem. Orice asemenea polinom poate fi identificat cu un vector cu zece componente, coeficienţii polinomului. Deci acest spaţiu se poate identifica cu $\mathbb{R}^{10}$ si are dimensiunea 10, o bază fiind $\{(1, 0, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0), ..., (0, 0, ..., 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^{10}$.

În general, se pot imagina diverse spaţii vectoriale cu dimensiunea $n$, adică spaţii finit-dimensionale. Mai mult, se pot defini chiar spaţii infinit dimensionale. De exemplu, mulţimea tuturor polinoamelor (de orice grad) cu coeficienţi reali este un asemenea spaţiu: orice asemenea polinom se poate identifica cu un şir de numere reale $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, ...)$ şi o bază în acest spaţiu este $\{(1, 0, 0, ...), (0, 1, 0, 0, ...), (0, 0, 1, 0, 0, ...), ...\}$. Fără să intrăm în detalii, menţionăm că tot spaţii infinit dimensionale sunt spaţiile Lebesgue şi spaţiile Sobolev, care sunt foarte utile în rezolvarea problemelor legate de ecuaţii cu derivate parţiale (de exemplu, ecuaţia căldurii, ecuaţia undelor, sistemul Navier-Stokes etc.).

Pentru exemplificare, ecuaţiile Navier-Stokes modelează multe fenomene din mecanica fluidelor, cum ar fi: mişcarea curenţilor atmosferici, curgerea aerului în jurul unei aripi de avion, curgerea sângelui prin vene etc. În particular, ecuaţiile Navier-Stokes se folosesc la proiectarea avioanelor. Atunci când călătorim cu un transatlantic, apreciem performanţele piloţilor, ceea ce este natural. Dar trebuie sa fim conştienţi că principalii autori sunt fizicienii, inginerii şi matematicienii care au contribuit la realizarea acestor aparate de zbor excepţionale. Acesta este doar un exemplu de felul cum ştiinţa, în particular matematica, vine în sprijinul societăţii umane.

De menţionat că studiul problemelor Navier-Stokes (formulate în secolul XIX) nu este complet, în sesul că existenţa şi unicitatea soluţiilor nu este cunoscută în cazul general. Demonstrarea acestor fapte ar aduce certitudine şi inţelegere completă a fenomenelor respective. Datorită importanţei deosebite, această problemă a fost inclusă pe o listă de şapte probleme deschise ale mileniului nostru (*Millenium Prize Problems*), propuse de Clay Mathematics Institute. Premiile (în valoare de câte un