MARIUS MARINEL STĂNESCU

DAN GHEORGHE BĂGNARU

MARIUS MARINEL STĂNESCU
DAN GHEORGHE BĂGNARU

MECANICĂ
TEORIE ŞI APLICAŢII

Editura UNIVERSITARIA
Craiova, 2018

Referenţi ştiinţifici:
Prof. univ. dr. ing. Vîlcu ROŞCA
Prof. univ. dr. ing. Dumitru BOLCU
Conf. univ. dr. ing. Nicolae CRĂCIUNOIU

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
STĂNESCU, MARIUS MARINEL
Mecanică : teorie şi aplicaţii / Marius Marinel Stănescu, Dan Gheorghe Băgnaru. - Craiova : Universitaria, 2015
Conţine bibliografie
ISBN 978-606-14-1409-3

I. Băgnaru, Dan-Gheorghe

531

PREFAŢĂ

Lucrarea este destinată studenţilor care urmează cursurile facultăţilor cu profil mecanic sau de construcţii, ea respectând programa analitică a disciplinei *Mecanică*. Totodată, ea poate fi folosită şi de studenţii altor facultăţi care au în programă disciplina *Mecanică*.

Sunt prezentate, mai întâi, noţiunile teoretice necesare punerii în operă a modelelor matematice aferente modelelor mecanice propuse, precum şi metodele de calcul moderne de rezolvare a acestora.

Evident că, pe lângă rezolvarea analitică a modelelor matematice, s-a pus accent şi pe soluţionarea numerică a acestora.

Alplicaţiile sunt rezolvate prin mai multe metode, astfel că soluţiile obţinute ne vor da certitudinea rezultatelor obţinute.

Astfel, s-au aplicat, fie metodele clasice aferente ecuaţiilor diferenţiale, fie metode mai moderne, cum ar fi transformatele integrale Laplace, acestea din urmă prezentând avantajul algebrizării problemei, care uşurează mult rezolvarea acestora.

Pentru o înţelegere mai uşoară a noţiunilor teoretice am considerat necesar să prezentăm o serie lucrări practice care verifică veridicitatea noţiunilor teoretice prezentate la orele de curs şi seminar.

Cum mişcarea este absolută, am preferat să prezentăm, mai întâi, capitolele aferente acesteia şi apoi cele referitoare staticii .

Conştienţi fiind că lucrarea poate primi îmbunătăţiri, mulţumim anticipat celor care vor face acest demers.

Autorii

CAPITOLUL 1
ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ, ANALIZĂ VECTORIALĂ ŞI TENSORIALĂ

Definiţia 1.1. Un vector $\overrightarrow{AB}$ este o mărime caracterizată prin patru elemente, după cum urmează:

1. punctul de aplicaţie sau originea A;
2. suportul său, adică dreapta definită de punctele A şi B;
3. sensul de parcurs de la A la B;
4. mărimea sau modulul (norma) sau intensitatea sa $\overrightarrow{AB}$, adică lungimea segmentului AB.

Definiţia 1.2. Produsul scalar al vectorilor $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ este o mărime scalară dată de relaţia

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 \cdot v_2 \cdot \cos\alpha \tag{1.1}$$

unde α este unghiul dintre doi vectori echipolenţi cu $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ şi având aceiaşi origine.

Reprezentând cei doi vectori în baza ortonormată $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, rezultă expresia analitică a produsului scalar în funcţie de componentele acestora:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_{1x} \cdot v_{2x} + v_{1y} \cdot v_{2y} + v_{1z} \cdot v_{2z} \tag{1.2}$$

Produsul scalar are următoarele proprietăţi:

1. comutativitatea, adică

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 \tag{1.3}$$

2. distributivitatea faţă de adunarea vectorială, adică

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i\right) \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{v}_i \cdot \vec{w}\right) \tag{1.4}$$

sau, cu alte cuvinte, la efectuarea produsului scalar parantezele se desfac ca la o înmulţire între numere.

3. daţi fiind scalarii $\forall\lambda \in R$, respectiv $\forall\lambda_1, \lambda_2 \in R$, rezultă

$$\lambda \cdot \left(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2\right) = \left(\lambda \cdot \vec{v}_1\right) \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \cdot \left(\lambda \cdot \vec{v}_2\right), \tag{1.5}$$

$$\left(\lambda_1 \cdot \vec{v}_1\right)\cdot\left(\lambda_2 \cdot \vec{v}_2\right) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \tag{1.6}$$

4. produsul scalar al unui vector prin el însuşi este

$$\vec{v}\cdot\vec{v} = v^2, \tag{1.7}$$

adică este egal cu pătratul mărimii vectorului.

5. notând cu $pr_{\vec{v}_1}\vec{v}_2 = v_2 \cdot \cos\alpha$ proiecţia ortogonală a lui $\vec{v}_2$ pe dreapta definită de vectorul $\vec{v}_1$, se poate scrie

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 \cdot pr_{\vec{v}_1}\vec{v}_2 \tag{1.8}$$

6. dacă $\vec{v}_1 = \vec{0}$ sau $\vec{v}_2 = \vec{0}$, sau dacă $\vec{v}_1$ este perpendicular pe $\vec{v}_2$, atunci

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{0} \tag{1.9}$$

Definiţia 1.3. Produsul vectorial al vectorilor $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ este un vector notat cu $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ care are:

- norma dată de relaţia

$$\left\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right\| = v_1 \cdot v_2 \cdot \sin\alpha \tag{1.10}$$

- direcţia perpendiculară pe planul determinat de doi vectori echipolenţi cu vectorii $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ şi având aceeaşi origine.

- sensul astfel ales încât vectorii $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ şi $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ să formeze un triedru drept.

Reprezentând cei doi vectori în baza ortonormată $\left(\vec{i}\,\vec{j},\vec{k}\right)$, rezultă expresia analitică a produsului vectorial în funcţie de componentele acestora în urma unei dezvoltări formale după prima linie a determinatului:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \end{vmatrix} = \left(v_{1y}\cdot v_{2z} - v_{1z}\cdot v_{2y}\right)\cdot\vec{i} + \left(v_{1z}\cdot v_{2x} - v_{1x}\cdot v_{2z}\right)\cdot\vec{j} + \left(v_{1x}\cdot v_{2y} - v_{1y}\cdot v_{2x}\right)\cdot\vec{k} \tag{1.11}$$

Produsul vectorial are următoarele proprietăţi:

1. anticomutativitatea, adică

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \times \vec{v}_1 \tag{1.12}$$

2. distributivitatea faţă de adunarea vectorială (teorema lui Varignon), adică

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \right) \times \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{v}_i \times \vec{w} \right) \tag{1.13}$$

sau, cu alte cuvinte, la efectuarea produsului scalar parantezele se desfac ca la o înmulţire între numere, fără a interveni însă ordinea factorilor.

3. daţi fiind scalarii $\forall \lambda \in R$, respectiv $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in R$, rezultă

$$\lambda \cdot \left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right) = \left(\lambda \cdot \vec{v}_1 \right) \times \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \times \left(\lambda \cdot \vec{v}_2 \right), \tag{1.14}$$

$$\left(\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 \right) \times \left(\lambda_2 \cdot \vec{v}_2 \right) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \tag{1.15}$$

4. produsul vectorial al unui vector prin el însuşi este nul, adică

$$\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0} \tag{1.16}$$

5. dacă $\vec{v}_1 = \vec{0}$ sau $\vec{v}_2 = \vec{0}$, sau dacă $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$, atunci

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{0} \tag{1.17}$$

Definiţia 1.4. Produsul mixt al vectorilor $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ $\vec{v}_3$ este un scalar real definit de relaţia:

$$\left(\vec{v}_1 ; \vec{v}_2 ; \vec{v}_3 \right) = \vec{v}_1 \cdot \left(\vec{v}_2 \times \vec{v}_3 \right) \tag{1.18}$$

Reprezentând cei trei vectori în baza ortonormată $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right)$, rezultă expresia analitică a produsului mixt în funcţie de componentele acestora:

$$\left(\vec{v}_1 ; \vec{v}_2 ; \vec{v}_3 \right) = \begin{vmatrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \\ v_{3x} & v_{3y} & v_{3z} \end{vmatrix} \tag{1.19}$$

Pentru a nu fi afectat de semn produsul mixt se ia în modul, altfel el este pozitiv dacă cei trei vectori, cu originea comună, formează un sistem drept de axe şi este negativ dacă aceştia formează un sistem stâng de axe.

Produsul mixt are următoarele proprietăţi:

1. modulul său este egal cu volumul paralelipipedului construit pe trei vectori echipolenţi cu vectorii $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ (interpretare geometrică).

2. respectă evident proprietăţile determinanţilor.

3. dacă $\vec{v}_1 \vee \vec{v}_2 \vee \vec{v}_3 = \vec{0}$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ sunt coplanari sau dacă doi dintre aceşti vectori sunt paraleli, atunci:

$$\left(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3\right) = 0$$

Definiţia 1.5. Dublul produs vectorial al vectorilor $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ este dat de relaţia:

$$\vec{v}_1 \times \left(\vec{v}_2 \times \vec{v}_3\right) = \vec{v}_2 \cdot \left(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3\right) - \vec{v}_3 \cdot \left(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2\right), \tag{1.20}$$

presupunând vectorii aduşi la o origine comună.

Dublul produsul vectorial are următoarele proprietăţi:

1. nu este asociativ, adică

$$\vec{v}_1 \times \left(\vec{v}_2 \times \vec{v}_3\right) \neq \left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right) \times \vec{v}_3 \tag{1.21}$$

2. dacă $\vec{v}_1 \, \mathrm{P} \vec{v}_2 \times \vec{v}_3$, atunci dublul produs vectorial este nul

3. $$\vec{v}_1 \times \left(\vec{v}_2 \times \vec{v}_3\right) = -\left(\vec{v}_2 \times \vec{v}_3\right) \times \vec{v}_1 \tag{1.22}$$

4. $$\vec{v}_1 \times \left(\vec{v}_2 \times \vec{v}_3\right) + \vec{v}_2 \times \left(\vec{v}_3 \times \vec{v}_1\right) + \vec{v}_3 \times \left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right) = \vec{0} \tag{1.23}$$

Trecând la un nou sistem de axe $O'x'y'z'\left(O'x_1^{'}x_2^{'}x_3^{'}\right)$ cu baza ortonormată $\left(\vec{i}_1^{\,'}, \vec{i}_2^{\,'}, \vec{i}_3^{\,'}\right)$, vom avea

$$\vec{i}_j^{\,'} = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{jk} \cdot \vec{i}_k, \; j = 1, 2, 3, \tag{1.24}$$

unde α_{jk} sunt cosinusurile directoare ale axei $O'x_i^{'}$ faţă de sistemul vechi de axe. Reciproc avem:

$$\vec{i}_j = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{kj} \cdot \vec{i}_k^{\,'}, \; j = 1, 2, 3, \tag{1.25}$$