ION PĂLĂRIE

OPTICA MATERIALELOR ANIZOTROPE

CURS UNIVERSITAR

EDITURA UNIVERSITARIA
Craiova, 2017

Referenți științifici:
Prof.univ.dr. Marcela Ursache
Conf. univ.dr. Gabriela Iacobescu

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
PĂLĂRIE, IOAN
Optica materialelor anizotrope : curs universitar / Ioan Pălărie. - Craiova : Universitaria, 2017
Conţine bibliografie
ISBN 978-606-14-1294-5

53

Apărut: 2017
TIPOGRAFIA UNIVERSITĂȚII DIN CRAIOVA
Tel.: +40 251 598054
Tipărit în România

Introducere

Există multe substanţe pentru care proprietăţile fizice nu depind de direcţia în care sunt considerate. Aceste substanţe se numesc *izotrope.* De exemplu, un gaz, un lichid, un mediu cristalin cu simetrie cubică prezintă pentru orice direcţie acelaşi coeficient de elasticitate, acelaşi coeficient de dilatare liniară, aceeaşi viteză de propagare a luminii, etc.

Spre deosebire de acestea, în natură există unele substanţe (de exemplu cele cristaline cu un sistem de cristalizare diferit de cel cubic) pentru care proprietăţile fizice depind de direcţie. Aceste substanţe sunt denumite *anizotrope.* Pe lângă substanţele anizotrope în mod natural există şi multe substanţe nativ izotrope la care anizotropia este indusă sub acţiunea unor constrângeri externe (elastice, electrice sau magnetice). Indiferent de natura sa, anizotropia este o consecinţă directă a distribuţiei regulate a atomilor sau ionilor în substanţa respectivă.

Din punct de vedere optic, un mediu este anizotrop dacă proprietăţile sale optice (viteza de fază, indicele de refracţie) pentru o undă electromagnetică plană ce se propagă prin acesta, depind de direcţia de propagare a undei. Chiar mai mult, în cazul mediilor anizotrope, pentru o direcţie de propagare dată, există, în general, doi indici de refracţie posibili. Aceste două valori ale indicelui de refracţie corespund la două unde electromagnetice care se propagă pe direcţia respectivă, au stările de polarizare reciproc ortogonale şi îşi păstrează aceste stări de polarizare în timpul propagării prin mediul anizotrop. Aceste stări de polarizare particulare sunt denumite *stări proprii* pentru direcţia de propagare considerată.

Se disting două tipuri de anizotropie optică:

- *anizotropia liniară* pentru care stările proprii de propagare sunt stările polarizate liniar;

- *anizotropia circulară* în care stările proprii de propagare sunt stările polarizate circular.

Aceste două tipuri de anizotropie pot exista în acelaşi timp într-un material, caz în care stările proprii de propagare sunt polarizate eliptic.

Anizotropia liniară

Medii dielectrice anizotrope liniar există în stare naturală. În stare solidă, mediile cristaline, exceptându-le pe cele cu simetrie cubică care sunt izotrope, au această proprietate. Dintre materialele anizotrope cele mai utilizate pentru realizarea de dispozitive care funcţionează în domeniul optic amintim cuarţul, calcitul, niobatul de litiu.

Lichidele, gazele şi solidele amorfe (exemplu sticla, plexiglasul) nu prezintă anizotropie optică liniară deoarece au o structură dezordonată. Cristalele lichide, într-un anumit interval de temperatură, au un anumit grad de ordonare care le permite să se comporte ca un mediu anizotrop, cu foarte multe aplicaţii practice.

Mediile iniţial izotrope îşi pierd izotropia iar mediile anizotrope îşi modifică anizotropia sub acţiunea unor constrângeri externe.

Aceste constrângeri pot fi de natură:

- *elastică* obţinute prin exercitarea unei presiuni. Apare astfel efectul fotoelastic.

- *electrică*, prin aplicarea unui câmp electric. În funcţie de natura materialului apare efectul Pockels sau efectul Kerr.

- *magnetică,* prin aplicarea unui câmp magnetic. Acest efect este cunoscut sub denumirea de efectul Cotton-Mouton.

Materialele a căror anizotropie poate fi variată ca urmare a unei acţiuni externe au o mare importanţă în practică deoarece anizotropia lor poate fi controlată.

Anizotropia circulară

Mediile prezentând anizotropie circulară există în stare naturală. Cuarţul are anizotropie circulară, deşi prezintă şi anizotropie liniară. Cloratul de sodiu $NaClO_3$ cristalizează cubic, nu are deci anizotropie liniară dar are anizotropie circulară. Mediile cristaline care au un centru de inversiune nu prezintă anizotropie circulară. Unele substanţe organice în stare lichidă (sulfura de carbon CS_2, benzenul C_6H_6, etc.) sau unele soluţii (zaharoză în apă, de exemplu) au anizotropie circulară. În plus, sub acţiunea unui câmp magnetic (efectul Faraday) unele substanţe (sticlele, substanţele amorfe) devin anizotrope circular.

Capitolul 1

Medii anizotrope birefringente liniar

1.1 Relaţia dintre vectorii D şi E

În cazul mediilor izotrope, relaţia dintre inducţia electrică **D** şi intensitatea câmpului electric **E** este

$$\mathbf{D} = \varepsilon\ \mathbf{E}, \tag{1.1}$$

unde ε este un scalar şi reprezintă permitivitatea electrică a mediului respectiv. Datorită caracterului scalar al lui ε în cazul mediilor izotrope, vectorul **D** are aceeaşi direcţie ca şi vectorul **E**, fiind deci paraleli. Prin urmare, între componentele acestor vectori, există relaţiille

$$D_x = \varepsilon\ E_x\ ;\ D_y = \varepsilon\ E_y\ ;\ D_z = \varepsilon\ E_z. \tag{1.2}$$

Pentru mediile anizotrope, permitivitatea electrică este o mărime tensorială, notată $[\varepsilon]$ şi descrisă prin matricea tensorului permitivitate electrică

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Relaţia dintre **D** şi **E**, în cazul mediilor anizotrope, are forma

$$\mathbf{D} = [\varepsilon]\ \mathbf{E}, \tag{1.4}$$

care poate fi explicitată în scriere matriceală astfel

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Datorită caracterului tensorial al lui $[\varepsilon]$, din relaţia (1.5), se deduce că, în general, **D** nu mai este paralel cu **E** pentru mediile anizotrope.

Se poate demonstra că, pentru medii fără absorbţie, omogene şi izotrope din punct de vedere magnetic (permeabilitatea magnetică μ este un scalar) tensorul permitivitate electrică $[\varepsilon]$ este simetric şi real, adică

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}\ ;\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}\ ;\ \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} \tag{1.6}$$

Prin intermediul unei schimbări corespunzătoare de sistem de coordonate tensorul $[\varepsilon]$, real şi simetric, poate fi adus la forma diagonală, ale cărei elemente sunt tot reale

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Sistemul de coordonate carteziene în care tensorul $[\varepsilon]$ este diagonal se numeşte *sistemul propriu mediului material* sau *sistemul axelor principale.* Axele de coordonate ale acestui sistem sunt denumite *axele proprii* sau *axele principale ale mediului.* Cele trei elemente diagonale ε_x, ε_y, ε_z se numesc permitivităţile electrice principale.

În sistemul axelor principale, relaţia (1.5) se poate scrie sub forma

$$D_x = \varepsilon_x\ E_x;\ D_y = \varepsilon_y\ E_y;\ D_z = \varepsilon_z\ E_z. \tag{1.8}$$

Din ultima relaţie se deduce că dacă vectorul **E** este orientat de-a lungul unei axe principale atunci vectorul **D** este paralel cu **E**, în toate celelalte cazuri vectorul **D** are o direcţie diferită de cea a lui **E**.

1.2 Structura undei electromagnetice

În cazul unui mediu material fără sarcini electrice libere ($\rho_{lib} = 0$) şi fără curenţi de conducţie ($\overrightarrow{j}_{cond} = 0$), în care permeabilitatea magnetică μ este un scalar, ecuaţiile Maxwell au următoarea formă

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \tag{1.9}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \tag{1.10}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{1.11}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{1.12}$$

Am notat cu **H** intensitatea câmpului mgnetic iar t semnifică timpul.

Pentru un mediu omogen şi izotrop, combinând relaţiile (1.2) şi (1.9), deducem

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}) = \varepsilon\ \nabla \cdot \mathbf{E} \tag{1.13}$$

de unde rezultă că $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$.

Pentru un mediu omogen dar anizotrop, în sistemul axelor principale, pe baza relaţiilor (1.8) şi (1.9) obţinem

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + \varepsilon_y \frac{\partial E_y}{\partial y} + \varepsilon_z \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{1.14}$$

Deoarece pentru un mediu anizotrop cele trei permitivităţi electrice principale (ε_x, ε_y şi ε_z) nu pot fi toate trei egale între ele (mediul ar fi izotrop în acest caz), deducem din ultima relaţie că, în general, la un mediu anizotrop $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$.

Considerăm o undă plană monocromatică, armonică, ce se propagă de-a lungul direcţiei definite prin versorul $\mathbf{u}_n = (\alpha, \beta, \gamma)$. Am notat cu α, β şi γ cosinusurile unghiurilor formate de $\mathbf{u}_n$ cu axele principale. Toţi vectorii caracteristici acestei unde (**E**, **D**, **H** şi **B**) se pot scrie sub forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \exp[i\omega(t - \frac{\mathbf{u}_n \cdot r}{v})] \tag{1.15}$$

unde A_0 este amplitudinea, ω este pulsaţia, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ este vectorul de poziţie al punctului în care a ajuns unda la momentul de timp t, iar v este viteza de fază.

Vectorul $\mathbf{A}$ este transversal (perpendicular pe $\mathbf{u}_n$) dacă $\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{A} = 0$. Pe baza relaţiei (1.15) obţinem componentele carteziene A_x, A_y şi A_z ale lui $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned} A_x &= A_{0x} \exp[i\omega(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v})] \\ A_y &= A_{0y} \exp[i\omega(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v})] \\ A_z &= A_{0z} \exp[i\omega(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v})] \end{aligned} \tag{1.16}$$

pe baza cărora stabilim următoarele relaţii

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = -\frac{i\omega}{v}\alpha A_x; \ \frac{\partial A_y}{\partial y} = -\frac{i\omega}{v}\beta A_y; \ \frac{\partial A_z}{\partial z} = -\frac{i\omega}{v}\gamma A_z. \tag{1.17}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = -\frac{i\omega}{v}\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{A} \tag{1.18}$$

Relaţia (1.18) conduce la concluzia că dacă $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, atunci $\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{A} = 0$, deci vectorul $\mathbf{A}$ este transversal.

Deducem astfel că pentru un mediu anizotrop sunt transversale câmpurile **D**, **H** şi **B** iar **E** nu este transversal. Pentru mediile izotrope **D**, **H**, **B** şi **E** sunt transversale.

Să determinăm orientarea relativă a vectorilor $\mathbf{u}_n$, **D**, **H** şi **E**.

Folosind relaţia (1.15) obţinem

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = i\omega\mathbf{A}; \ \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{i\omega}{v}\mathbf{u}_n \times \mathbf{A} \tag{1.19}$$

Pe baza relaţiilor (1.11), (1.12) şi (1.19) deducem

$$-\frac{i\omega}{v}\mathbf{u}_n \times \mathbf{E} = -i\mu\omega\mathbf{H}; \; -\frac{i\omega}{v}\mathbf{u}_n \times \mathbf{H} = i\omega\mathbf{D} \tag{1.20}$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n \times \mathbf{E} &= \mu v\mathbf{H}; &(1.21)\\ \mathbf{u}_n \times \mathbf{H} &= -v\mathbf{D} &(1.22)\end{aligned}$$

Ultimele relaţii ne arată că $\mathbf{H} \perp \mathbf{u}_n$, $\mathbf{H} \perp \mathbf{E}$, $\mathbf{D} \perp \mathbf{u}_n$ şi $\mathbf{D} \perp \mathbf{H}$. Concluzionăm că $\mathbf{H}$ este perpendicular pe vectorii $\mathbf{u}_n$, $\mathbf{D}$ şi $\mathbf{E}$, ceea ce arată că cei trei vectori $\mathbf{u}_n$, $\mathbf{D}$ şi $\mathbf{E}$ sunt coplanari. Acest plan este denumit planul de oscilaţie electrică şi este notat ($\mathbf{u}_n$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$). În acest plan, $\mathbf{D}$ este perpendicular pe versorul $\mathbf{u}_n$ al direcţiei de propagare a undei.

Să eliminăm vectorul $\mathbf{H}$ combinând relaţiile (1.21) şi (1.22). Din (1.21) rezultă $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu v}\mathbf{u}_n \times \mathbf{E}$. Introducând această expresie a lui $\mathbf{H}$ în (1.22), după mici calcule, obţinem $\mu v^2\mathbf{D} = \mathbf{u}_n \times (\mathbf{E} \times \mathbf{u}_n)$. Folosind identitatea $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ şi faptul că $\mathbf{u}_n$ este versor $\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_n = 1$, obţinem în final

$$\mu v^2\mathbf{D} = \mathbf{E} - \mathbf{u}_n(\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{E}) \tag{1.23}$$

Notăm cu $\mathbf{u}_r$ versorul direcţiei vectorului Poynting $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Este clar că $\mathbf{u}_r \perp \mathbf{E}$ şi $\mathbf{u}_r \perp \mathbf{H}$. Deoarece $\mathbf{H}$ este perpendicular pe planul ($\mathbf{u}_n$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$), rezultă că $\mathbf{u}_r$ aparţine acestui plan. Orientarea relativă a acestor vectori este prezentată în Fig. 1.1.

Direcţia definită de $\mathbf{u}_n$ se numeşte *direcţia undei* (este direcţia de propagare a undei) iar cea definită de $\mathbf{u}_r$ este *direcţia razei* (fiind direcţia de transmitere a energiei electromagnetice).

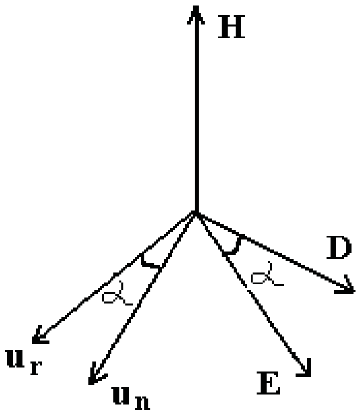

Figura 1.1: Orientarea relativă a vectorilor $\mathbf{H}$, $\mathbf{u}_n$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ şi $\mathbf{u}_r$.

Pentru a găsi relaţia dintre viteza de fază v (de propagare a undei de-a lungul lui $\mathbf{u}_n$) şi viteza razei luminoase v_r (de transmitere a energiei de-a lungul lui $\mathbf{u}_r$), considerăm o undă ce se propagă pe direcţia lui $\mathbf{u}_n$ şi are planele de fază constantă la momentele de timp t şi t' notate cu P respectiv P' (Fig. 1.2).

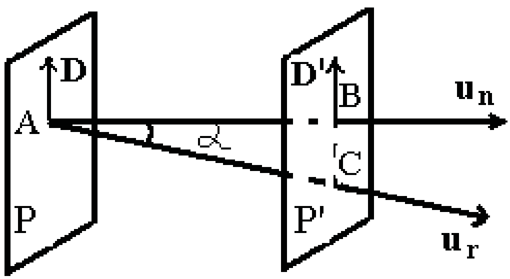

Figura 1.2: Planele de fază la momentele de timp t şi t'.